مقدمة فى رياضيات الاستثمار والتمويل

تأليف
مدرس الإحصاء والرياضة
د . أحمد كامل

مراجعة
أستاذ الإحصاء والرياضة المساعد
د. ممدوح عبد العليم

يهدف هذا المؤلف إلى عرض بعض أساليب رياضيات الاستثمار والتمويل باسلوب مبسط مع عرض الكثير من التمارين والحالات التطبيقية حتى يتمكن الطالب من:

(١) الالمام بالأسس والمبادىء الأساسية لعلم الرياضة المالية وتحديد معايير الاختيار والتعرف على النماذج والأدوات المستخدمة فى مجال هذا العلم وعلى مبادئه وأسسه، بهدف إكساب الطالب المهارات المعرفية المطلوبة.

(٢) التحليل والاستنتاج لمساندة عملية اتخاذ القرارات وتنمية مهارات التعامل مع البيانات والمعلومات وفهم الإبداع والابتكار وصقل مهارة التفكير لتطبيق النظريات على الواقع العملى، بهدف إكساب الطالب المهارات الفكرية اللازمة.

(٣) تطبيق النماذج والأساليب الكمية فى الحياة العملية وزيادة القدرة على الاستفادة وتطبيق المفاهيم والاستراتيجيات وتنمية مهارات التنبؤ والتخطيط فى المنظمات بهدف تنمية المهارات التطبيقية لدى الطالب.

(٤) القدرةعلى التحليل وطرح الاستفسارات وفهم طبيعة وديناميكية العمل وكيفية تحقيق التوقعات وزيادة القدرة على التفاعل وتحويلية بهدف تنمية مهارات الاتصال لدى الطالب.

اسأل الله أن يكون هذا الكتاب عوناً للدارسين ، ومحققاً الهدف المرجو منه.

المؤلف

الفهرس

الباب الأول

الفائدة البسيطة

الفصل الأول
مفهوم الفائدة
والعوامل المؤثرة فى تحديد قيمة الفائدة

مفاهيم أساسية

الفائدة هى عائد استخدام رأس المال، فمن وجهة نظر المقترض (المدين) هى المبلغ الذى يدفعه نظير استخدام أو حيازة أو استثمار مبلغ من المال. أما من جهة المقرض (الدائن) هى الدخل الذى يحصل عليه مقابل إقراض أمواله للغير.

وعادة ما تتحدد الفائدة فى شكل معدل فائدة مئوى أى نسبة مئوية، وهذا المعدل يخص فترة محددة عادة ما تكون سنة، أو نصف سنة وقد تكون ربع سنة أو شهراً، وقد تكون أو أسبوعية أو يومية. وتتغير قيمة معدل الفائدة من وقت لأخر ومن مكان لأخر طبقا للعوامل الآتية :

١ ـ العرض والطلب على العملة محل الاستثمار، فكلما زاد الطلب على العملة زاد معدل الفائدة عليها و العكس صحيح .

٢ ـ درجة الخطر التى تواجه رأس المال و الفائدة الناتجة منهم فكلما زادت درجة الخطر زاد معدل الفائدة وهذا يعنى أن جزءا من معدل الفائدة عادة ما يخصص لمقابلة درجه الخطر .

٣ ـ انخفاض القدرة الشرائية للنقود (التضخم) و يرتبط بسعر الفائدة بعلاقة طردية واضحة .

والعوامل السابقة تظهر لماذا يوجد فرق بين معدل الفائدة على الجنيه المصرى والدولار الأمريكى مع ثبات العوامل الأخرى .

العوامل المؤثرة في تحديد قيمة الفائدة

تعتمد قيمة الفائدة، وسوف نرمز لها بالرمز (ف)، والتى تستحق فى نهاية مدة الاستثمار على ثلاث عوامل تؤثر فى تحديد تلك القيمة وهى :

١ ـ قيمة المبلغ المستثمر أو المبلغ المقترض ويرمز له بالرمز (أ) والعلاقة بين قيمة الفائدة والمبلغ المستثمر أو المقترض علاقة طردية. فكلما زادت قيمة المبلغ الذى يتم عرضه من جانب أصحاب رؤوس الأموال لاستثماره بواسطة الغير فى شكل قروض أو من خلال شراء الأوراق المالية (أسهم و سندات) كلما زدات قيمة الفائدة الناتجة. ومن ناحية أخرى فقد يرغب صاحب رأس المال فى استثمار أمواله بنفسه، وفى هذه الحالة فإن عائد الاستثمار يشمل الفائدة (عائد رأس المال) بالإضافة إلى عائد الادارة والتنظيم بواسطة صاحب رأس المال.

٢ ـ معدل الفائدة، وسوف يرمز له بالرمز (ع) وهو يأخذ شكل نسبة مئوية، والعلاقة بين قيمة الفائدة وبين معدل الفائدة علاقة طردية. ومعدل الفائدة هو عائد ١٠٠ وحدة نقود المستخدمة عن كل وحدة زمنية محددة. فإذا قلنا أن معدل الفائدة هو ١٠% سنويا فهذا يعنى أن كل ١٠٠ وحدة نقود تدر عائداً مقداره ١٠ وحدات نقود عن كل سنة ، أى أن المائة جنيه تعطى عائد ١٠ جنيه كل سنة نظير استثمارها. وجرى العرف على أن الوحدة الزمنية لمعدل الفائدة هو سنة مالم ينص صراحة على أقل من ذلك.

٣ ـ مدة القرض أو مدة الاستثمار، وسوف يرمز لها بالرمز (ن) وتربطها بقيمة الفائدة علاقة طردية أيضاً. ومدة القرض أو مدة الاستثمار قد تكون أقل من أو تساوى سنة أو أكثر من سنة. ففى حالة كون المدة أقل من سنة، فقد تكون بالأيام أو الشهور أو كسور السنة (ربع سنوية، نصف سنوية) وعادة تستخدم فى هذه الحالة نوع من الفائدة يعرف "بالفائدة البسيطة". أما فى حالة زيادة مدة القرض عن سنة فقد تكون الفائدة المستخدمة إما فائدة بسيطة أو فائدة مركبة والقاعدة أن تكون المدة من نفس وحدة الزمن المستخدمة فى المعدل ، فمثلاً إذا كان معدل الفائدة ١٠% عن كل سنة فإن المدة يجب أن تكون بالسنوات.

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :

الأصل فى العمليات المالية أن تحسب الفائدة عن وحدة زمن واحدة عادة ما تكون سنة بمعدل فائدة يناسب وحدة الزمن ويسمى حينئذ معدل فائدة سنوى . فإذا لم يتم إضافة الفائدة الناتجة إلى رأس المال فى نهاية وحدة الزمن وأعيد استثمار رأس المال فقط ولم تؤخذ قيمة الفائدة فى الاعتبار عند حساب الفائدة فى نهاية وحدة الزمن الثانية وما تليها من وحدات الزمن فان الحسابات حينئذ تتم باستخدام اسلوب الفائدة البسيطة.

أما إذا أضيفت فائدة الوحدة الأولى من الزمن إلى الأصل المستثمر، بحيث يعاد استثمارها مع الأصل خلال باقى وحدات الزمن، وبالمثل أضيفت فائدة الوحدة الثانية من الزمن إلى الأصل المستثمر، بحيث يعاد استثمارها مع الأصل خلال باقى وحدات الزمن، وهكذا إذا أضيفت فائدة باقى وحدات الزمن التالية إلى الأصل المستثمر، بحيث يعاد استثمارها مع الأصل خلال وحدات الزمن اللاحقة لها اعتبرت الحسابات بهذا الأسلوب حسابات فائدة مركبة.

وتستخدم الفائدة البسيطة عادة عندما تكون مدة الاستثمار أو مدة الاقتراض قصيرة كما فى حالة القروض قصيرة الأجل وفى هذه الحالة نجد أن المدة قد تكون بالأيام أو الشهور .

أما الفائدة المركبة فتستخدم فى حالة القروض طويلة الأجل ومدد الاستثمار الطويلة و التى عادة ما تكون بالسنوات .

الفائدة و الخصم :

تعتبر الفائدة هى العائد أو المقابل الذى يحصل عليه صاحب رأس المال مقابل إعطائه ماله لآخر لاستخدامه خلال مدة معينة بمعدل معين. بينما الخصم هو تنازل عن جزء من المال مقابل الحصول على ذلك المال قبل تاريخ استحقاقه .

القانون الأساسى للفائدة البسيطة

مما سبق يتضح أن الفائدة (ف) هى العائد الناتج عن استثمار (اقتراض) مبلغ معين بمعدل معين ولمدة معينة عادة ما تكون اقل من سنة. ويتبين من ذلك أن هناك ثلاث عناصر أساسية تؤثر فى تحديد قيمة الفائدة وهى:

١ ـ أصل المبلغ المستثمر أو المبلغ المقترض (أ).

٢ ـ معدل الفائدة (ع).

٣ ـ المدة (ن).

وبالنظر لطبيعة العلاقة الطردية بين قيمة الفائدة والعوامل الثلاثة المؤثرة فيها يمكن استنتاج القانون الأساسى للفائدة كالتالى:

الفائدة البسيطة = المبلغ المستثمر × معدل الفائدة × مدة الاستثمار

بالرموز :

ف = أ × ع × ن ——— (١)

حيث :

ف ← الفائدة المستحقة فى نهاية المدة.

أ ← أصل المبلغ المستثمر أو المقترض.

ع ← معدل الفائدة (سعر الفائدة) .

ن ← مدة الاستثمار.

شروط تطبيق القانون الأساسى للفائدة:

يشترط لتطبيق القانون الأساسى للفائدة الشروط التالية:

أولاً:- يشترط أن يكون معدل الفائدة (ع) سنوى و إذا كان معدل الفائدة البسيطة غير سنوى يجب تحويله إلي سنوى كالتالي :

١ - إذا كان المعدل المعطى بالتمرين لكل شهر (شهري)

← يتم ضرب المعدل × ١٢ لتحويله إلى معدل سنوي.

٢ - إذا كان المعدل لكل شهرين (أى سدس سنوي)

← يتم ضرب المعدل × ٦ لتحويله الى معدل سنوى .

٣ - إذا كان المعدل لكل ٣ شهور (أى ربع سنوي)

← يتم ضرب المعدل × ٤ لتحويله الى معدل سنوى .

٤ - إذا كان المعدل لكل ٤ شهور (أى ثلث سنوى) .

← يتم ضرب المعدل × ٣ لتحويله إلى معدل سنوى .

٥ - إذا كان المعدل لكل ٦ شهور (أى نصف سنوى) .

← يتم ضرب المعدل × ٢ لتحويله إلى معدل سنوى .

ملاحظة: إذا لم يذكر فى التمرين نوع المعدل يفترض انه معدل سنوى .

ثانياً:- يشترط أن تكون مدة الاستثمار أو الاقتراض (ن) بالسنوات و إذا كانت المدة غير سنوية يجب تحويلها إلي سنوات كالتالي :

١- إذا كانت المدة بالشهور

إذا كانت مدة القرض أو الاستثمار بالأشهر الكاملة فيجب قسمة عدد هذه الأشهر على عدد أشهر السنة الإجمالية (١٢ شهر) حتى يمكن الوصول إلى كسر السنة الذى سيستخدم للتعبير عن المدة (ن) فى القانون الأساسى للفائدة البسيطة أى تكون :

$$\therefore \text{المدة بالسنوات (ن)} \longleftarrow \frac{\textbf{المدة بالشهور}}{\textbf{١٢}}$$

٢- إذا كانت المدة بالاسابيع

إذا كانت مدة القرض أو الاستثمار بالأسابيع الكاملة فيجب قسمة عدد هذه الأسابيع على عدد أسابيع السنة الإجمالية (٥٢ أسبوع) حتى يمكن الوصول إلى كسر السنة الذى سيستخدم للتعبير عن المدة (ن) فى القانون الأساسى للفائدة البسيطة أى تكون :

$$\therefore \text{المدة السنوية (ن)} \longleftarrow \frac{\textbf{المدة بالأسابيع}}{\textbf{٥٢}}$$

٣- إذا كانت المدة بالأيام

إذا كانت مدة الاستثمار أو الاقتراض بالأيام فيجب قسمة عدد هذه الأيام على عدد أيام السنة الفعلية - أى كان نوعها - وذلك بهدف الوصول إلى كسر السنة الذى سيستخدم للتغبير عن المدة (ن) فى القانون الأساسى للفائدة البسيطة أى تكون

$$\therefore \text{المدة السنوية (ن)} \longleftarrow \frac{\textbf{المدة بالأيام}}{\textbf{٣٦٥ أو ٣٦٦}}$$

ملاحظة هامة فى حالة المدة بالأيام

يلاحظ أنه إذا كانت المدة بالأيام يجب تحديد كل من:

أ ـ عدد أيام السنة الفعلية.

ب ـ عدد أيام الاستثمار أو الاقتراض.

أ ـ تحديد عدد أيام السنة الفعلية:

يجب أن يكون معلوماً لدينا ما يلى :

١ـ هناك سبعة شهور بكل سنة ، عدد أيام كل منها ٣١ يوماً ، وهى بالترتيب :

يناير ، مارس ، مايو ، يوليو ، أغسطس ، أكتوبر ، ديسمبر .

٢ ـ بينما هناك أربعة شهور بكل سنة عدد أيام كل منها ، ٣٠ يوماً ، وهى:

أبريل ، يونيو ، سبتمبر ، نوفمبر .

٣ ـ هناك شهر فبراير وتبلغ عدد أيامه ٢٨ يوماً، إذا كانت السنة بسيطة، بينما تبلغ ٢٩ يوماً إذا كانت السنة كبيسة .

٤ ـ مجموع عدد أيام السنة البسيطة ٣٦٥ يوماً ، ويستدل على كون السنة بسيطة إذا كانت لا تقبل القسمة على (٤) مثل السنوات ٢٠٠١ ، ٢٠٠٢ ، ٢٠٠٣ ٠٠٠٠٠الخ.

٥ ـ يبلغ مجموع عدد أيام السنة الكبيسة ٣٦٦ يوماً ، ويستدل على كون السنة كبيسة إذا كانت تقبل القسمة على (٤) بدون باق ٢٠٠٤ ، ٢٠٠٨ ، ٢٠١٢ ٠٠٠٠الخ

ب ـ تحديد عدد أيام الاستثمار أو الاقتراض

تنحصر مدة القرض أو الاستثمار بينن تاريخين، هما تاريخ يوم الاقتراض أو الايداع، وتاريخ يوم السداد أو السحب ، وعند حساب مدة القرض أو الاستثمار ، يجب ألا يدخل ضمنها كل من يوم الاقتراض أو الايداع على ان يدخل ضمنها يوم السداد أو السحب ، وذلك لأنه يفترض أن الاقتراض أو الايداع فى منتصف تاريخ ذلك اليوم كمايفترض أن السداد أو السحب تم فى منتصف تاريخ ذلك اليوم ، ومن ثم يجب أن تحسب الفوائد على النصف الأخير من اليوم الأول لتاريخ الاقتراض أو الايداع ، كما تحسب الفوائد على النصف الأول من اليوم الأخير لتاريخ السداد أو

السحب ، وحيث أنه يكون كلا من نصفى اليومين المشار إليهما يوماً واحداً فقط ، لذلك-فمن الناحية العملية يؤخذ فى الاعتبار إما يوم الاقتراض أو الإيداع ، أو يوم السداد أو السحب للوصول إلى المدة الدقيقة للقرض أو للاستثمار بالأيام ، والتى على أساسها نصل إلى المدة الفعلية للقرض أو للاستثمار. فمثلا إذا أودع شخصاً مبلغاً ما فى يوم ٥ يناير سنة ٢٠١٥ ثم قام بسحب هذا المبلغ يوم ٩ مايو سنة ٢٠١٥ فتحسب مدة هذا الاستثمار بالقاعدة التالية :

مدة الإيداع بالأيام = عدد الأيام المتبقية فى شهر الإيداع (بإهمال يوم الايداع)
+ عدد أيام الشهور التالية كاملة
+ عدد ايام شهر السحب (بإخذ يوم السحب فى الاعتبار)

<u>بالتعويض فى القاعدة السابقة:</u>

يناير فبراير مارس إبريل مايو

مدة الإيداع بالأيام = ٢٦ + ٢٨ + ٣١ + ٣٠ + ٩

(٣١ ـ ٥) (لأن سنة ٢٠١٥ سنة بسيطة)

= $\boxed{١٢٤}$ يوم

تدريب : أحسب مدة الإيداع لمبلغ أودع فى بنك يوم ٣ مارس ٢٠١٥ وسحب فى ٢٣ يونيه من نفس السنة .

تدريب : احسب مدة الاقتراض لقرض من بنك معين فى يوم ٨ فبراير ٢٠١٢ حتى ٧ يوليو من نفس السنة .

ملاحظة

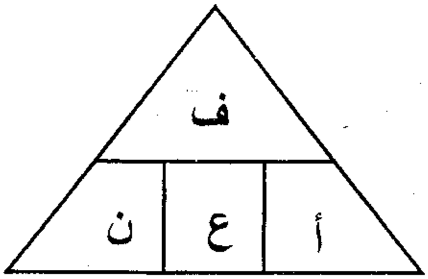
عند حساب المدة بين تاريخين (مثلاً تاريخ الإيداع ، وتاريخ السحب) قد يكون هناك إتفاق بين التاريخين بمعنى ان يكون يوم الإيداع هو نفس يوم السحب ولكن فى شهر مختلف وفى هذه الحالة يفضل حساب المدة بين التاريخين بالشهور وليس بالأيام

فمثلاً عند حساب مدة الإيداع لمبلغ أودع فى بنك يوم ٣ مارس ٢٠١٥ وسحب فى ٣ يوليو من نفس السنة نجد أن:

المدة بالشهور = شهر يوليو ـ شهر مارس = شهر ٧ ـــ شهر ٤ = ٣ شهور

إيجاد قيمة العوامل المحددة للفائدة

يمكن إيجاد العوامل المحددة للفائدة (أ ، ع ، ن) بمعلومية الفائدة (ف) وذلك من خلال الاستعانة بالشكل التالى كما يلى:



إيجاد أصل المبلغ (أ):

من القانون الأساسى للفائدة **ف** = أ × ع × ن نجد أن

إيجاد معدل الفائدة (ع):

من القانون الأساسى للفائدة **ف** = أ × ع × ن نجد أن

إيجاد المدة (ن):

من القانون الأساسى للفائدة **ف** = أ × ع × ن نجد أن

مثال

قام شخص باقتراض مبلغ ٦٠٠٠ جنيه ، لمدة ٣ سنوات من إحدى البنوك ، أوجد مقدار الفائدة البسيطة التى تستحق عليه عن مدة القرض المذكورة ، علماً بأن معدل الفائدة المتفق عليه ٥ % سنويا .

الحل

أ = ٦٠٠٠ جنيه ن = ٣ سنوات ع = ٨ % سنوياً

ف = أ × ع × ن

$$= ٦٠٠٠ \times \frac{٥}{١٠٠} \times ٣$$

= ٩٠٠ جنيه

مثال

أودع عباس مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه فى البنك الوطنى المصرى لمدة سنة ونصف، وكان البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل ١٠% سنويا احسب مقدار الفائدة المستحقة لمصطفى فى نهاية المدة

الحل

أ = ١٠٠٠٠ جنيه ن = ١,٥ سنة ع = ١٠ % سنوياً

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} \times ١,٥$$

= ١٥٠٠ جنيه

مثال

أوجد الفائدة البسيطة المستحقة على قرض قيمته ١٤٠٠٠ جنيه لمدة ٨ شهور ، إذا علم أن معدل الفائدة المستخدم ٧,٥ % سنويا.

الحل

أ = ١٤٠٠٠ جنيه　　　ن = ٨ شهور　　　ع = ٧,٥ % سنوياً

ف = أ × ع × ن

$$= ١٤٠٠٠ \times \frac{٧,٥}{١٠٠} \times \frac{٨}{١٢}$$

= ٧٠٠ جنيه

مثال

أودع عماد مبلغ ٤٠٠٠ جنيه فى بنك عوده لمدة ١٣ أسبوع ، وكان البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل ١٢% سنويا احسب مقدار الفائدة المستحقة فى نهاية المدة.

الحل

أ = ٤٠٠٠ جنيه　　　ن = ١٣ أسبوع　　　ع = ٧,٥ % سنوياً

ف = أ × ع × ن

$$= ٤٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٣}{٥٢}$$

= ١٢٠ جنيه

مثال

ماهى الفائدة البسيطة المستحقة على مبلغ ١٠٠٠ جنيه بسعر فائدة ٧ % سنوياً إذا كانت مدة الاستثمار:

(أ) سنتين　　　(ب) شهرين .

الحل

أ = ١٠٠٠ جنيه　　　ن = حسب المطلوب　　　ع = ٧ % سنوياً

<u>(أ) سنتين</u>

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٧}{١٠٠} \times ٢$$

= ١٤٠ جنيه

<u>(أ) شهرين</u>

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٧}{١٠٠} \times \frac{٢}{١٢}$$

= ١١,٦٧ جنيه

مثال

أوجد الفائدة البسيطة لمبلغ ١٠٠٠ج لكل حالة مما يلى :-

أ) بمعدل شهرى $\frac{١}{٢}$ % ولمدة ٤٠ أسبوع.

ب) بمعدل ربع سنوى ٥% ولمدة ١٨ شهر.

جـ) بمعدل نصف شهرى ١% ولمدة ١,٣ سنة

الحل

أ) بمعدل شهرى $\frac{١}{٢}$ % ولمدة ٤٠ أسبوع

أ = ١٠٠٠ ، ع = $\frac{١}{٢}$ % × ١٢ = ٦ % ، ن = $\frac{٤٠}{٥٢}$ أسبوع

تم الضرب × ١٢ لأنه شهرى

تم القسمة ÷ ٥٢ للتحويل إلى سنوات

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٤٠}{٥٢} = ٤٦,٢ \text{ جنيه}$$

ب) بمعدل ربع سنوى ٥% ولمدة ١٨ شهر

أ = ١٠٠٠ ، ع = ٥% × ٤ = ٢٠% ، ن = $\frac{١٨}{١٢}$

تم الضرب × ٤ لأنه ربع سنوى

تم القسمة ÷ ١٢ للتحويل إلى سنوات

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{١٨}{١٢} = ٣٠٠ \text{ جنيه}$$

جـ) بمعدل نصف شهرى ١% ولمدة ١,٣ سنة

أ = ١٠٠٠ ، ع = ٢% × ١٢ = ٢٤% ، ن = ١,٣ سنة

١% في نصف الشهر أى ٢% في الشهر × ١٢

ف = أ × ع × ن

$$= ١٠٠٠ \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times ١,٣ = ٣١٢ \text{ جنيه}$$

مثال

استثمر مبلغ معين لمدة ١٠ أشهر فبلغت الفائدة البسيطة ٢٤ جنيه بمعدل شهرى ١% فما هو أصل المبلغ ؟

الحل

أ = ؟ ، ن = $\frac{\text{١٠ أشهر}}{١٢}$ ، ف = ٢٤ج ، ع = ١% × ١٢ = ١٢%

$$\text{أ} = \frac{\text{ف}}{\text{ع} \times \text{ن}} = \frac{٢٤}{\frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٢}} = ٢٤٠ \text{ جنيه}$$

مثال

أودع شخص مبلغ ٥٠٠ جنيه يوم ٦ يناير ٢٠١٥ بمعدل نصف سنوى ٤% وسحب الفائدة يوم ٦ ابريل من نفس العام ، فما هى الفوائد البسيطة ؟

الحل

أ = ٥٠٠ ج ، ع = ٤% × ٢ = ٨% ، ن = ٣ شهور

(من ٦ يناير ٢٠١٥ إلى ٦ إبريل ٢٠١٥)

يلاحظ فى حالة تطابق يوم الإيداع مع يوم السحب يتم حساب المدة بالشهور

ف = أ × ع × ن

$$= ٥٠٠ \times \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢} = ١٠ \text{ جنيه}$$

الفائدة الصحيحة والفائدة التجارية

عندما تكون مدة الاستثمار بالأيام يجب التفرقة بين نوعين من الفائدة :

فائدة تجارية	فائدة صحيحة ف ص	
ورمزها ف ت	وهى تعتد بعدد الأيام الفعلية للسنة والتى قد تكون أما:	أو
وهى تعتبر أن عدد أيام السنة ٣٦٠ يوم ويكثر استخدامها فى البنوك بهدف تسهيل العمليات الحسابية	٣٦٥ يوم وتسمى سنة بسيطة وتتميز بان عدد أيام شهر فبراير فيها (٢٨ يوم) وتكرر ثلاث سنوات متتابعة	٣٦٦ يوم وتسمى سنة كبيسة وتتميز بان عدد أيام شهر فبراير فيها (٢٩ يوم) وتكرر مرة كل ٤ سنوات

قوانين الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة

<u>قانون الفائدة التجارية</u>

$$ف ت = أ \times ع \times \frac{\text{عدد الأيام}}{٣٦٠}$$

قانون الفائدة الصحيحة

$$\text{ف ص} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{عدد الأيام}}{\text{٣٦٥ أو ٣٦٦}}$$

ملاحظات:

١ ـ تستخدم الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة عندما تكون المدة بالأيام فقط.

٢ ـ دائماً الفائدة التجارية تكون أكبر من الفائدة الصحيحة.

٣ ـ إذا لم يذكر في التمرين نوع الفائدة يفترض إنها فائدة تجارية.

٤ ـ لا تستخدم الفائدة الصحيحة إلا إذا نص ذلك صراحة في التمرين.

٥ ـ إذا لم يحدد بالتمرين نوع السنة (بسيطة أو كبيسة) وطلب الفائدة الصحيحة جري العرف علي اعتبارها بسيطة (٣٦٥ يوم وشهر فبراير ٢٨ يوم).

٦ ـ في حالة تحديد سنة الإستثمار أو الإقتراض بالتمرين وطلب صراحة حساب الفائدة الصحيحة يتم التحقق من كونها سنة بسيطة أم كبيسة من خلال قسمتها ÷ ٤ فإذا كان الناتج كسر ∴ السنة بسيطة ونقسم المدة بالأيام ÷ ٣٦٥ أما إذا كان الناتج رقم صحيح ∴ السنة كبيسة ونقسم المدة بالأيام ÷ ٣٦٦

٧ ـ إذا أعطي سنة معينة (٢٠١٠ مثلاً) ولم يذكر صراحة أن المطلوب الفائدة الصحيحة يتم حسب عدد الأيام الفعلية داخل كل شهر من أشهر الاستثمار أو الإقتراض ثم نقسم الأيام الفعلية علي ٣٦٠ علي إعتبار أنها فائدة تجارية لأنه لم يحدد نوع الفائدة.

٨ ـ في حالة عدم ذكر سنة محددة يتم خلالها الاستثمار أو الإقتراض بالتمرين ثم طلب الفائدة الصحيحة صراحة نفترض أنها سنة بسيطة ونقسم المدة بالأيام ÷ ٣٦٥ لأن السنوات البسيطة تتكرر أكثر من السنوات الكبيسة

العلاقة بين الفائدة الصحيحة والتجارية:

توجد أربعة علاقات هامة تربط بين نوعى الفائدة يلزم التعرف عليها، دون التطرق إلى البراهين الرياضية والإثباتات، من أجل التبسيط، وهذه العلاقات هى:

العلاقة الأولى: وتفيد فى إيجاد الفائدة التجارية بمعلومية الفائدة الصحيحة وتنص على:

$$\boxed{\text{ف ت} = \frac{\text{٧٣}}{\text{٧٢}}\ \text{ف ص}}$$

العلاقة الثانية: وتفيد فى إيجاد الفائدة الصحيحة بمعلومية الفائدة التجارية وتنص على:

$$\boxed{\text{ف ص} = \frac{٧٢}{٧٣}\ \text{ف ت}}$$

العلاقة الثالثة: وتفيد فى إيجاد الفائدة التجارية بمعلومية الفرق بين الفائدتين وتنص على:

$$\boxed{\text{ف ت} = ٧٣ \times \text{الفرق بين الفائدتين}}$$

العلاقة الرابعة: وتفيد فى إيجاد الفائدة الصحيحة بمعلومية الفرق بين الفائدتين وتنص على:

$$\boxed{\text{ف ص} = ٧٢ \times \text{الفرق بين الفائدتين}}$$

مثال

استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠ جنيه لمدة ٦٠ يوم فكان الفرق بين الفائدتين التجارية والحقيقية ٠,٣٠ جنيه ، فأوجد كل من الفائدتين وكذلك معدل الاستثمار ؟

الحل

أ = ١٠٠٠ ج ، ن = ٦٠ يوم ، الفرق = ٠,٣٠ ج

إيجاد الفائدة التجارية

ف ت = الفرق × ٧٣

= ٠,٣٠ × ٧٣ = ٢١,٩

إيجاد الفائدة الصحيحة

ف ص = الفرق × ٧٢

= ٠,٣٠ × ٧٢ = ٢١,٦

إيجاد المعدل

$$\text{ع} = \frac{\text{ف ت}}{\text{أ} \times \text{ن}} = \frac{٢١,٩}{١٠٠٠ \times \frac{٦٠}{٣٦٠}}$$

= ٠,١٣١٤ × ١٠٠

= $\boxed{\text{١٣,١٤\%}}$

مثال

إذا كان الفرق بين الفائدتين التجارية والصحيحة هو ١,٢ ج لمبلغ معين استثمر لمدة ٩٠ يوماً بمعدل ١٢% سنوياً ، فما هو مقدار كل من الفائدتين وما هى قيمة المبلغ ؟

الحل

الفرق = ١,٢ ، ن = ٩٠ يوم ، ع = ١٢%

إيجاد الفائدتين

ف ت = الفرق × ٧٣

= ١,٢ × ٧٣ = ٨٧,٦ ج

ف ص = الفرق × ٧٢

= ١,٢ × ٧٢ = ٨٦,٤٠ ج

إيجاد المبلغ

$$أ = \frac{ف ت}{ع \times ن} = \frac{٨٧,٦}{\frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٣٦٠}} = ٢٩٢٠ \text{ جنيه}$$

إيجاد الجملة

عندما يستثمر شخص مبلغاً ما وليكن (أ) لدى إحدى البنوك، وذلك بمعدل فائدة بسيطة قدره (ع)، ولمدة قدرها (ن)، ففى نهاية هذه المدة يجب على جهة الاستثمار سداد أصل المبلغ المستثمر مضافاً إليه الفائدة المستحقة المتولدة من الاستثمار ، ويسمى الأصل مضافاً إليه فائدته باسم الجملة أو الرصيد.

وبالمثل قد يقترض شخص مبلغ معين وليكن (أ)، وذلك لمدة محددة ولتكن (ن) وبمعدل فائدة بسيطة وليكن (ع)، ففى نهاية هذه المدة يكون على الشخص المقترض أن يسدد إلى أصل القرض مضافاً إليه الفوائد المستحقة، أى جملة القرض.

أن جملة القرض أو جملة المبلغ المستثمر والتى سنرمز له بالرمز (حـ) عبارة عن :

١ـ أصل القرض أو أصل المبلغ المستثمر (أ)، مضافاً إليه:

٢ـ مقدار الفائدة عى هذا القرض أو المبلغ المستثمر (ف).

أى أن الجملة (جـ) عبارة عن :

حـ = أ + ف

لكن ف = أ × ع × ن .... كما سبق وبالتعويض عن (ف) فى معادلة (١)

حـ = أ + (أ × ع × ن) ، وبأخذ (أ) كعامل مشترك

حـ = أ (١ + ع ن)

ويسمى القانون حـ = أ (١ + ع ن) بالقانون الأساسى للجملة هذا ويمكننا استنباط بعض المعادلات لحساب أصل المبلغ (أ) أو معدل الفائدة (ع) أو المدة (ن) من قانون الجملة السابق وذلك فى حالة ما إذا كانت الجملة معلومة كما يلى :

أولاً : استنتاج أصل المبلغ (أ) :

∵ حـ = أ (١ + ع ن)

ثانياً: استنتاج معدل الفائدة (ع) :

∵ جـ = أ + أ × ع × ن

∴ جـ - أ = أ × ع × ن

ثالثاً : استنتاج مدة القرض أو مدة الاستثمار (ن):

∵ جـ = أ + أ × ع × ن

∴ جـ - أ = أ × ع × ن

مثال :

احسب جملة مبلغ ٦٠٠٠ جنيه استثمر فى بنك مصر بمعدل ١٢% سنوياً لمدة ١٨ شهراً.

الحل

أ = ٦٠٠٠ ج ، ع = ١٢ % سنوياً ، ن = $\frac{\text{١٨شهر}}{\text{١٢}}$

∵ جـ = أ (١ + ع ن)

∴ جـ = ٦٠٠٠ $\left(١ + \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٨}{١٢}\right)$

= ٦٠٠٠ (١,١٨)

= $\boxed{٧٠٨٠}$ جنيه

حل آخر

يمكن إيجاد الفائدة أولاً

∵ ف = أ × ع × ن

∴ ف = ٦٠٠٠ × $\frac{١٢}{١٠٠}$ × $\frac{١٨}{١٢}$

= ١٠٨٠ جنيه

ثم تضاف الفائدة إلى الأصل بعد ذلك لنحصل على الجملة كما يلى:

جـ = أ + ف

= ٦٠٠٠ + ١٠٨٠

= $\boxed{٧٠٨٠}$ جنيه نفس الإجابة

مثال :

أوجد الفائدة التجارية المستحقة لمبلغ ٧٠٠٠ جنيه لمدة ١٢٥ يوم بسعر فائدة ٦ % ؟ ثم أوجد جملة هذا المبلغ ؟

الحل

أ = ٧٠٠٠ ج ، ع = ٦ % سنوياً ، ن = $\frac{\text{١٢٥يوم}}{\text{٣٦٠}}$

<u>إيجاد الفائدة التجارية أولاً</u>

$$\because \text{ف ت} = \text{أ} \times \text{ع} \times \frac{\text{عدد الأيام}}{\text{٣٦٠}}$$

$$\therefore \text{ف ت} = \text{٧٠٠٠} \times \frac{\text{٦}}{\text{١٠٠}} \times \frac{\text{١٢٥}}{\text{٣٦٠}}$$

= ١٤٥,٨ جنيه

<u>إيجاد الجملة</u>

يتم إضافة الفائدة التجارية إلى الأصل بعد ذلك لنحصل على الجملة كما يلى:

جـ = أ + ف ت

= ٧٠٠٠ + ١٤٥,٨

= $\boxed{\text{٧١٤٥,٨}}$ جنيه

مثال :

أوجد جملة المبلغ المستثمر لمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه إذا علمت أن مدة الإيداع سنة وثلاثة أشهر ، والفائدة البسيطة حسبت بمعدل ٩ % سنوياً .

الحل

أ = ١٠٠٠٠ ج ، ع = ٩ % سنوياً ، ن = $\frac{\text{١٥شهر}}{\text{١٢}}$

$$\because \text{جـ} = \text{أ} (\text{١} + \text{ع ن})$$

$$\therefore \text{جـ} = \text{١٠٠٠٠} \left(\text{١} + \frac{\text{٩}}{\text{١٠٠}} \times \frac{\text{١٥}}{\text{١٢}}\right)$$

= ١٠٠٠٠ (١,١١٢٥)

= $\boxed{\text{١١١٢٥}}$ جنيه

مثال

استثمر شخص مبلغ معين لمدة ٨ أشهر بمعدل ربع سنوى ٥% فبلغت الجملة ١٦٠٠ جنيه فما هو هذا المبلغ ؟

الحل

ن = $\frac{٨}{١٢}$ ، ع = ٥% × ٤ = ٢٠ % ، جـ = ١٦٠٠ أ = ؟

∵ جـ = أ (١ + ع ن)

∴ أ = $\frac{جـ}{(١ + ع ن)}$

∴ أ = $\frac{١٦٠٠}{\left(١ + \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٨}{١٢}\right)}$ = ١٤١١,٧٦ جنيه

مثال :

ما هو المبلغ الذى تصبح جملته ١١٢٠ جنيه بعد ثلاثة سنوات بمعدل ٨ % سنوياً

الحل

ن = ٣سنوات ، ع = ٨ % ، جـ = ١١٢٠ ، أ = ؟

∵ جـ = أ (١ + ع ن)

∴ أ = $\frac{جـ}{(١ + ع ن)}$

∴ أ = $\frac{١١٢٠}{\left(١ + \frac{٨}{١٠٠} \times ٣\right)}$ = $\boxed{٩٠٣,٢}$ جنيه

مثال :

ما هو معدل الفائدة البسيطة الذى لو استثمر به مبلغ ٢٧٥٠ جنيه لمدة سنتين لكانت جملته ٣٠٠٠ جنيه؟

الحل

∴ ع = ٤,٥ %

مثال :

اقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه فى ٤ أغسطس ٢٠١٥ بفائدة بسيطة صحيحة بمعدل ٦% سنوياً ، وفى يوم معين من نفس العام دفع سداداً لدينه ١٠٠٨٠ جنيه فأوجد تاريخ السداد .

ن = ٠,١٣ سنة

ن بالأيام = ٠,١٣ × ٣٦٥ = ٤٨,٦٧ ≅ ٤٩ يوم

	أغسطس		سبتمبر	
ن =	٢٧	+	٢٢	= ٥٠ يوم
	(٣١ – ٤)			

∴ تاريخ السداد هو ٢٢ سبتمبر ٢٠١٥

مثال

أودع شخص مبلغ ٦٠٠ جنيهاً يوم ٤ فبراير ٢٠١٣ فى البنك الأهلى بمعدل فائدة سنوى ١٢٪ ، فإذا كانت جملة هذا المبلغ عندما تم سحبه هى ٦١٠ جنيه ، فما هو تاريخ سحب المبلغ ؟

الحل

أ = ٦٠٠ ج ، ع = ١٢٪ ، جـ = ٦١٠ ، ن = ؟

ف = جـ - أ = ٦١٠ - ٦٠٠ = ١٠ج

ن بالسنوات = $\frac{\text{ف}}{\text{أ} \times \text{ع}} = \frac{١٠}{٦٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠}}$ = ٠,١٣٨٨ سنة

ن بالأيام = ٠,١٣٨٨ × ٣٦٠ = ٤٩,٩٦ = $\boxed{٥٠}$ يوم تقريباً

فبراير مارس

ن = ٢٤ + ٢٦ = ٥٠ يوم

(٢٨ - ٤)

∴ تاريخ السحب هو ٢٦ مارس ٢٠١٣

مجموع الفوائد على عدة مبالغ

عند يودع شخص عدة مبالغ مختلفة فى أوقات مختلفة فى حسابه الخاص بأحد البنوك، وتطلب الأمر حساب مجموع الفوائد المستحقة له. وكذلك عندما يسدد شخص ديونه فى صورة دفعات غير متساوية، وتطلب الأمر حساب مجموع الفوائد المستحقة فإنه يوجد أحد حالتين وهما:

<u>الحالة الأولى:</u> أن تكون

١- المبالغ غير متساوية .

٢- معدلات الفائدة لكل مبلغ غير متساوية .

٣- فترات إيداع المبالغ غير متساوية .

ففى مثل هذه الحالة يتم إيجاد مجموع الفوائد المستحقة عن طريق جمع الفائدة المتولدة من كل مبلغ من المبالغ المراد إيجاد مجموع فوائدها كل على حده . فإذا كانت فائدة المبلغ الأول ف$_1$ ، وفائدة المبلغ الثانى ف$_2$ ، وفائدة المبلغ الثالث ف$_3$ ..... وهكذا فإن :

مجموع الفوائد = $\boxed{ف_1 + ف_2 + ف_3 \cdots\cdots}$

<u>أى أن:</u>

مجموع الفوائد = $\boxed{أ_1 \times ع_1 \times ن_1 + أ_2 \times ع_2 \times ن_2 + أ_3 \times ع_3 \times ن_3 + \cdots}$

<u>الحالة الثانية:</u> أن تكون

١- المبالغ غير متساوية .

٢- معدل الفائدة <u>مشترك</u> لكل المبالغ .

٣- فترات إيداع المبالغ غير متساوية .

ففى هذه الحالة يفضل استخدام <u>طريقة النمر</u> فى حساب مجموع الفوائد كاسلوب سهل وبسيط وسريع فى نفس الوقت، وفيما يلى عرض مبسط للطريقة.

طريقة النمر:

تستخدم طريقة النمر ، إذا ما تعددت مبالغ الايداعات واختلفت قيمة كل مبلغ عن الآخر ، مع اختلاف مدة إيداع كل منها عن الآخر ، وبشرط استخدام معدل فائدة مشترك لجميع المبالغ ، فإذا كانت مدد الإيداع أو الاستثمار محسوبة بالشهور أو الأيام فإن حاصل ضرب كل مبلغ × مدته يسمى بالنمر الشهرية، وإذا كانت مدد الإيداع أو الاستثمار محسوبة بالأيام فإن حاصل ضرب كل مبلغ × مدته يسمى بالنمر اليومية كما هو موضح بالجدول التالى:

	المبالغ		مدة كل مبلغ		النمر
المبلغ الأول	$أ_١$	×	$م_١$	=	$أ_١ م_١$
المبلغ الثانى	$أ_٢$	×	$م_٢$	=	$أ_٢ م_٢$
المبلغ الثالث	$أ_٣$	×	$م_٣$	=	$أ_٣ م_٣$
			مجموع النمر	=	xxx

ثم يتم حساب مجموع الفوائد كالآتى:

مجموع الفوائد = مجموع النمر × $\frac{ع}{١٢}$ إذا كانت المدد بالشهور

أو مجموع النمر × $\frac{ع}{٣٦٠}$ إذا كانت المدد بالأيام والفائدة تجارية

أو مجموع النمر × $\frac{ع}{٣٦٥}$ إذا كانت المدد بالأيام والفائدة صحيحة والسنة بسيطة

أو مجموع النمر × $\frac{ع}{٣٦٦}$ إذا كانت المدد بالأيام والفائدة صحيحة والسنة كبيسة

وإذا كان المطلوب هو الجملة فيتم إيجاد ها كما يلى:

الجملة = مجموع المبالغ + مجموع الفوائد

أى أن:

الجملة = ($أ_1 + أ_2 + أ_3 + \cdots\cdots$) + مجموع الفوائد

مثال :

أودعت شركة المبالغ التالية فى أحد البنوك:

٣٠٠٠ جنيه استثمار لمدة ٣ شهور

٤٠٠٠ جنيه استثمار لمدة ٤ شهور

٥٠٠٠ جنيه استثمار لمدة سنة

احسب مجموع الفوائد المستحقة على تلك المبالغ إذا كان معدل الفائدة المشترك ١٢% سنوياً .

الحل

يلاحظ أن هناك عدة مبالغ مختلفة تم استثمارها لمدد مختلفة بمعدل فائدة مشترك فيمكن إيجاد مجموع الفوائد المستحقة باستخدام طريقة النمر ، وذلك كما يلى:

١) إيجاد مجموع النمر:

	المبالغ		مدة كل مبلغ		النمر
المبلغ الأول	٣٠٠٠	×	٣	=	٩٠٠٠
المبلغ الثانى	٤٠٠٠	×	٤	=	١٦٠٠٠
المبلغ الثالث	٥٠٠٠	×	١٢	=	٦٠٠٠٠
			مجموع النمر	=	٨٥٠٠٠

٢) إيجاد مجموع الفوائد

مجموع الفوائد = مجموع النمر × $\frac{ع}{١٢}$ (نظراً لأن المدد بالشهور)

$= ٨٥٠٠٠ \times \frac{٠,١٢}{١٢}$

$= \boxed{٨٥٠}$ جنيه

مثال

أودع شخص المبالغ التالية فى بنك مصر

٥٠٠ جنيه لمدة ٣٠ يوم

٨٠٠ جنيه لمدة ٥٠ يوم

٤٠٠ جنيه لمدة ٧٠ يوم

فما هى الفوائد البسيطة لهذه المبالغ وما هى الجملة إذا كان معدل الفائدة البسيطة ١٢ % سنوياً ؟

الحل

المبلغ		المدد بالأيام		النمر اليومية
٥٠٠	×	٣٠	=	١٥٠٠٠
٨٠٠	×	٥٠	=	٤٠٠٠٠
٤٠٠	×	٧٠	=	٢٨٠٠٠
مجموع النمر اليومية			=	٨٣٠٠٠

يلاحظ أن المدد بالأيام ولم يحدد نوع الفائدة ولذلك نستخدم الفائدة التجارية

مجموع الفوائد التجارية = مجموع النمر × $\frac{ع}{٣٦٠}$

$$= ٨٣٠٠٠ \times \frac{٠,١٢}{٣٦٠}$$

= $\boxed{٢٧,٦٧}$ جنيه

الجملة = مجـ المبالغ + مجـ الفوائد التجارية

= (٥٠٠ + ٨٠٠ + ٤٠٠) + ٢٧,٦٧

= $\boxed{١٧٢٧,٦٧}$ جنيه

مثال

استثمر شخص المبالغ التالية فى أحد البنوك:

١٠٠٠جنيه لمدة ٥٠ يوم

٨٠٠ جنيه لمدة ٦٠ يوم

٧٠٠ جنيه لمدة ٤٠ يوم

بمعدل فائدة ربع سنوى ٥% ، أوجد مجموع الفوائد الصحيحة المستحقة على المبالغ الثلاثة وماهو الرصيد المستحق للشخص ؟

الحل

المعدل السنوى = ٥% × ٤ = ٢٠%

إيجاد مجموع النمر اليومية = ١٠٠٠ × ٥٠ + ٨٠٠ × ٦٠ + ٧٠٠ × ٤٠

= ١٢٦٠٠٠

مجموع الفوائد الصحيحة = مجموع النمر × $\frac{ع}{٣٦٥}$

= ١٢٦٠٠٠ × $\frac{٠,٢٠}{٣٦٥}$

= $\boxed{٦٩}$ جنيه

<u>إيجاد الرصيد (الجملة)</u>

الجملة = مجـ المبالغ + مجـ الفوائد الصحيحة

= (١٠٠٠ + ٨٠٠ + ٧٠٠) + ٦٩

= $\boxed{٢٥٦٩}$ جنيه

تمارين الفائدة البسيطة

(١) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه فى بنك مصر لمدة سنتين ونصف وكان البنك يحسب فوائد بسيطة بمعدل ١٠% سنوياً . احسب المستحقة لها فى نهاية المدة.

(٢) إذا بلغ الفرق بين الفائدتين التجارية والصحيحة ١٥ جنيهات لمبلغ معين ، استثمر لمدة ١٥٠ يوماً ، بمعدل فائدة ٦% سنوياً ، أوجد قيمة هذا المبلغ ؟

(٣) استثمر تاجر مبلغاً فى الفترة من ٢٠١٣/٤/١ إلى ٦/٢٠ من نفس العام بمعدل ٩ % سنوياً، وكان الفرق بين الفائدتين التجارية والصحيحة ٨ جنيهات لنفس المدة ونفس المعدل، أوجد أصل المبلغ ؟

(٤) استثمر شخص مبلغ ٦٠٠٠ جنيه لمدة سنة بمعدل فائدة بسيطة ٦% سنوياً فأوجد الفائدة المستحقة خلال هذه المدة وكذلك أوجد الجملة .

(٥) أوع شخص مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى أحد البنوك ، فإذا علمت أن مدة الإيداع ٢٧٠ يوماً، ومعدل الفائدة البسيطة المستخدمة ٥ % سنوياً، أوجد جملة المبلغ المستثمر لهذا العميل فى نهاية المدة المذكورة.

(٦) ماهو المبلغ الذى بعد سنتين تصبح جملته ٧٨٤ جنيه إذا كان معدل الفائدة البسيطة النصف سنوى٣%.

(٧) ماهو معدل الفائدة البسيطة الذى لو استثمر به مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه لمدة ١,٥ سنة لكانت جملته ١١٢٠٠ جنيه .

(٨) أوجد الفائدة التجارية والفائدة الصحيحة لمبلغ ٢٥٠٠ جنيه فى الفترة من٥/٤/ ٢٠١٢ إلى ٢٠١٢/٨/٤ علماً بأن معدل الفائدة السائد ٦ %.

(٩) ما هو المبلغ الذى بلغت فائدته البسيطة ٣٢٠ جنيه عندما استثمر لمدة أربعة شهور بمعدل فائدة بسيطة ١٢% سنوياً .

(١٠) إذا بلغت الفائدة على مبلغ ما ٢٠١ جنيهاً ، عندما استثمر لمدة سنة وأربعة شهور وذلك بمعدل فائدة بسيطة ٢,٥% سنوياً، أوجد المبلغ المستثمر .

(١١) شركة مدينة بالمبالغ الآتية :

٣٠٠٠ جنيه لمدة سنة و ٦ شهور.

٢٠٠٠ جنيه لمدة تسعة شهور .

١٠٠٠ جنيه لمدة خمسة عشر شهراً.

أوجد الفائدة المستحقة عن هذه الديون إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ١٤% سنوياً وذلك باستخدام طريقة النمر.

(١٢) احسب الفائدة المستحقة على المبالغ الآتية فى ٤ سبتمبر ٢٠١٥ باستخدام النمر . وذلك على أساس معدل فائدة بسيطة ٦ % سنوياً.:

مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه أوع فى ٤ ديسمبر ٢٠١٤

مبلغ ٦٥٠٠ جنيه أودع فى ٤ فبراير ٢٠١٥

مبلغ ٧٠٠٠ جنيه أودع فى ٤ مارس ٢٠١٥

(١٣) إذا كان الفرق بين الفائدتين التجارية والصحيحة هو نصف جنيهاً لمبلغ ٦٠٠ جنيهاً استثمر بمعدل ١٢% فما هي مدة استثمار المبلغ؟

(١٤) اقترض شخص ١٥٠٠ جنيهاً في ٦ يناير علي أن يعيد المبلغ والفوائد المستحقة في مايو ٢٠١٣ بمعدل فائدة ١٢% سنوياً فما هي جملة ما سيدفعه ؟

(١٥) أودع شخص ٢٠٠٠ جنيه في بنك مصر يوم ١٧ ابريل ٢٠١٤ ، ثم ٦٠٠ جنيه في ١٥ مايو ٢٠١٤ ، ثم ٧٠٠ جنيهاً في ٢٠ يوليو ٢٠١٤ ، فإذا كان معدل الفائدة ١٢% فأوجد جملة ما يستحقه في ٢٣ ديسمبر ٢٠١٤.

(١٦) أقترض شخص ١٠٠٠ جنيهاً لمدة ٥ أشهر ، ٢٠٠٠ جنيهاً لمّدة ١٠ أشهر ٨٠٠ جنيهاً لمدة ٦ أشهر فما هي جملة ما يسدده إذا كان معدل الفائدة ١٨% سنوياً ؟

الفصل الثاني

حساب فوائد وجملة الدفعات المتساوية

مقدمة

الدفعات المتساوية هى مبالغ متساوية يتم دفعها اوسدادها على فترات زمنية منتظمة، ومن الأمثلة الشائعة والمعروفة لهذا النوع من الدفعات، القيمة الإيجارية المحصلة – سواء لعقار سكنى أو أرض....إلخ وذلك بفرض ثباتها وعدم تعرضها لأى تغيير خلال مدة معينة، فقيمة الإيجار تكون عبارة عن مبلغ ثابت، يتم دفعه على فترات دورية ثابتة، وقد تكون مدة الدفعة طويلة (سنة أو أكثر) وهى الشائعة الاستخدام فى الفائدة المركبة كم سيأتى بيانه عند دراسة موضوعات الفائدة المركبة، وقد تكون مدة الدفعة قصيرة (أقل من سنة) وهى الشائعة الاستخدام فى الفائدة البسيطة، حيث تكون مدة الدفعة نصف سنة، أو ربع سنة أو كل شهرين أو شهر أو نصف شهر .... إلخ.

أنواع الدفعات

يتوقف تصنيف أو تقسيم الدفعات على توقيت سداد الدفعة، حيث يمكن تقسيم الدفعات إلى نوعين :

أولا: الدفعات العادية : وهى التى يتم سداد مبلغها فى نهاية كل فترة زمنية محددة (مثلاً آخر كل شهر، أو آخر كل شهرين، أو آخر كل ربع سنة .....إلخ وعادة ما يستخدم مثل هذا النوع من الدفعات عند سداد قرض من خلال التقسيط ومن ثم يطلق عليها (دفعة سداد).

ثانياً : الدفعات الفورية : وهى التى يتم دفع مبلغها فى بداية كل فترة زمنية محددة (مثلاً أول كل شهر، أو أول كل شهرين، أو أول كل ربع سنة .....إلخ وغالباً ما يستخدم هذا النوع من الدفعات فى حالات إستثمار مبالغ كايداعها فى البنوك ، ومن ثم يطلق عليها (دفعة إستثمار).

تعاريف هامة:

مدة الدفعات

وهى المدة من بداية دفع الدفعة الأولى إلى نهاية فترة الدفعة الأخيرة ، فمثلاً إذا أودع شخص مبلغ ما وليكن (ط) شهرياً، لمدة سنة كاملة على أن يتم الإيداع فى أول كل شهر اعتباراً من أول يناير ، فالمدة من أول يناير (بداية فترة أول دفعة) حتى آخر ديسمبر (نهاية فترة أخر دفعة) تسمى بمدة الدفعات وهى هنا تساوى إثنا عشر شهراً .... وهكذا.

مدة الدفعة

وهى المدة بين تاريخى بداية أو تاريخى نهاية دفعتين متتاليتين، فمثلا إذا كان هناك قرض يسدد على دفعات ربع سنوية إعتباراً من أول يناير حتى آخر ديسمبر، فالمدة من أول يناير إلى أول إبريل تسمى مدة الدفعة الأولى وقدرها ٣شهور (ربع سنة)، والمدة من آخر سبتمبر حتى آخر ديسمبر تسمى مدة الدفعة الأخيرة وقدرها ٣شهور (ربع سنة) أيضاً .

مبلغ الدفعة

وهو المبلغ الدورى الثابت الذى يدفع أو يسدد فى بداية أو نهاية كل فترة زمنية للدفعة، وسنرمز له بالرمز (ط).

عدد الدفعات

وسنرمز له بالرمز (د)، وعدد الدفعات قد يتم استنتاجه مباشرة، أو يمكن حسابه، وذلك بقسمة مدة الدفعات على مدة الدفعة الواحدة أى أن :

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات}}{\text{مدة الدفعة الواحدة}}$$

فمثلاً إذا كانت الدفعة يتم سدادها كل شهرين لمدة سنة (١٢ شهر) فإن:

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات}}{\text{مدة الدفعة الواحدة}} = \frac{١٢}{٢} = \text{٦ دفعات}$$

ومثلاً إذا كانت الدفعة يتم سدادها كل ربع سنة (كل ٣ شهور) لمدة سنتين (٢٤ شهر) فإن:

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات}}{\text{مدة الدفعة الواحدة}} = \frac{٢٤}{٣} = ٨ \text{ دفعات}$$

أيضاً إذا كانت الدفعة يتم سدادها كل نصف سنة (كل ٦ شهور) لمدة سنتين (٢٤ شهر) فإن:

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات}}{\text{مدة الدفعة الواحدة}} = \frac{٢٤}{٦} = ٤ \text{ دفعات}$$

..... وهكذا

<u>جملة الدفعات المتساوية</u>

وسنرمز لها بالرمز (جـ)، وهى عبارة عن مجموع مبالغ الدفعات مضافاً إليها مجموع فوائد هذه الدفعات. ومن ثم فيوجد مكونين إثنين لجملة الدفعات، وهما:

١ـ مجموع مبالغ الدفعات = مبلغ الدفعة × عدد الدفعات

$= \boxed{\text{ط} \times \text{د}}$

٢ـ مجموع فوائد الدفعات

= مبلغ الدفعة × معدل الفائدة × مجموع مدد استثمار الدفعات

= ط × ع × (مدة استثمار الدفعة الأولى + مدة استثمار الدفعة الثانية + ... + مدة استثمار الدفعة الأخيرة)

ويلاحظ على قانون مجموع فوائد الدفعات ما يلى:

- ثبات قيمة كل من مبلغ الدفعة ومعدل الفائدة يجعلهما عامل مشترك عند تجميع الفوائد.

- نظراً لأن طول الفترة الزمنية للدفعة ثابت، فإننا سنجد ان مدد إستثمار أو سداد عدد من الدفعات خلال مدة محددة سيتناقص بمقدار ثابت، أى أن مدد الإستثمار أو السداد هذه ستكون على شكل متوالية عددية، عدد حدودها عبارة عن عدد الدفعات خلال هذه المدة، وحدها الأول عبارة عن مدة استثمار أو سداد الدفعة الأولى، وحدها الأخير عبارة عن مدة استثمار أو سداد الدفعة الأخيرة ، ويمكن الاستفادة من قانون مجموع المتوالية العددية فى هذه النقطة، فيكون مجموع مدد الدفعات عبارة عن :

$$\text{مجموع المدد} = \frac{\text{عدد الدفعات}}{٢} \times \frac{(\text{مدة الدفعة الأولى} + \text{مدة الدفعة الأخيرة})}{١٢}$$

<u>ويجب ملاحظة أنه</u>

- تم القسمة على (١٢) فى القانون السابق لتحويل المدد الشهرية من إلى سنوات.
- <u>فى حالة الدفعات العادية</u>

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأولى بالشهور ورمزها ($ن_١$) تساوى

= $\boxed{\text{المدة كلها بالشهور} - \text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}}$

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ر$) = $\boxed{\text{صفر}}$ دائماً

- <u>أما فى حالة الدفعات الفورية</u>

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$) = $\boxed{\text{المدة كلها بالشهور}}$

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ر$) = $\boxed{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}}$

خطوات حساب جملة الدفعات

يتم تطبيق الخطوات التالية عند حساب جملة الدفعات :

<u>أولا: استخراج بيانات التمرين</u>

مبلغ الدفعة ← ط

معدل الفائدة ← ع

عدد الدفعات ← د

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأولى بالشهور ← $ن_١$

مدة استثمار أو سداد الدفعة الأخيرة بالشهور ← $ن_ن$

<u>ثانياً: تطبيق قانون جملة الدفعات :</u>

$$\boxed{ج = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ن\right)}{١٢}}$$

وتجدر الإشارة إلى:

- يختلف مجموع فوائد الدفعات خلال مدة محددة باختلاف نوع الدفعة وتكون فى الدفعات غير العادية أكبر منها فى الدفعات العادية وذلك بفرض ثبات كل من: مبلغ الدفعة، مدة الدفعات، وطول الفترة الزمنية للدفعة الواحدة ومعدل الفائدة، ويرجع الاختلاف فى مجموع الفوائد إلى اختلاف مدد استثمار الدفعات فى كل منهما عن الأخرى.
- إذا كان هناك نوعين من دفعات الإيداع، كأن يودع المستثمر دفعات متساوية قيمة كل دفعة ١٠٠٠ جنيه فى أخر كل شهر من الستة أشهر الأولى من السنة، ثم يودع دفعات متساوية أخرى قيمة كل دفعة ٢٠٠٠ جنيه فى أخر كل شهرمن الستة أشهر الثانية من السنة فتكون جملة الدفعات أو رصيد الشخص فى نهاية السنة عبارة عن:

$$\boxed{\text{الرصيد} = \text{جملة الدفعات الأولى} + \text{جملة الدفعات الثانية}}$$

- كذلك إذا كان هناك دفعات أيداع ودفعات سحب فتكون جملة الدفعات أو رصيد الشخص عبارة عن:

$$\boxed{\text{الرصيد = جملة دفعات الايداع – جملة دفعات السحب}}$$

- في حالة عدم ذكر نوع الدفعة يفترض أنها دفعات عادية، أى يتم دفعها فى نهاية كل فترة زمنية.

مثال

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ جنيه شهرياً في أحد البنوك فإذا كان معدل الفائدة ١٢ % أوجد جملة الدفعات بعد سنة إذا كانت:

١) الدفعة المتساوية تدفع فى آخر كل شهر.

٢) الدفعة المتساوية تدفع فى أول كل شهر.

الحل

<u>١) إذا كانت الدفعة المتساوية تدفع فى آخر كل شهر</u> (عادية)

<u>أولاً: البيانات</u>

ط = ١٠٠٠ جنيه شهرياً ، ع = ١٢ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{١} = ١٢ \text{ دفعة}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة الدفعة الواحدة الشهور

= ١٢ - ١ = ١١ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$) = صفر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(\text{ن}_١ + \text{ن}_\text{ل})}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ١٢ + ١٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{(١١ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$= ١٢٠٠٠ + ٦٦٠$$

= ١٢٦٦٠ جنيه

٢) إذا كانت الدفعة المتساوية تدفع في أول كل شهر (غير عادية)

أولاً: البيانات

ط = ١٠٠٠ جنيه شهرياً ، ع = ١٢ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{١} = ١٢ \text{ دفعة}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($\text{ن}_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($\text{ن}_\text{ل}$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ١ شهر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(\text{ن}_١ + \text{ن}_\text{ل})}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ١٢ + ١٠٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{(١٢ + ١)}{١٢}$$

$$= ١٢٠٠٠ + ٧٨٠$$

= ١٢٧٨٠ جنيه

يلاحظ: ان جملة الدفعات غير العادية أكبر من جملة الدفعات العادية ويرجع الاختلاف إلى مجموع الفوائد والذى يتأثر بدوره باختلاف مدد استثمار الدفعات العادية عن مدد استثمار الدفعات غير العادية.

مثال

إذا كانت لدينا دفعة ربع سنوية، تدفع كل ٣ شهور، مبلغها ١٠٠٠ جنيه وتجتسب لها فوائد بسيطة بمعدل ٦ % سنوياً، فأوجد جملة هذه الدفعة فى نهاية سنة كاملة إذا كانت :

١) عادية

٢) فورية

الحل

١) إذا كانت الدفعة عادية

أولاً: البيانات

ط = ١٠٠٠ جنيه ، ع = ٦% ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة الدفعة الواحدة الشهور

= ١٢ - ٣ = ٩ شهور

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$) = صفر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(\text{ن}_١ + \text{ن}_\text{ل})}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ٤ + ١٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٤}{٢} \times \frac{(٩ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$= ٤٠٠٠ + ٩٠$$

= ٤٠٩٠ جنيه

٢) إذا كانت الدفعة المتساوية تدفع في أول كل شهر (غير عادية)

أولاً: البيانات

ط = ١٠٠٠ جنيه ، ع = ٦% ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($\text{ن}_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($\text{ن}_\text{ل}$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٣ شهر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(\text{ن}_١ + \text{ن}_\text{ل})}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ٤ + ١٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٤}{٢} \times \frac{(١٢ + ٣)}{١٢}$$

= ١٥٠ + ٤٠٠٠

= ٤١٥٠ جنيه

مثال

يدفع شخص ٥٠٠ جنيهاً في نهاية كل ٤ شهور لمدة سنتين وذلك سداداً لمبلغ معين اقترضه ، فما هي جملة ما دفعه علماً بأن معدل الفائدة البسيطة السنوي ٨٪ ؟

الحل

نوع الدفعة ⟵ عادية ⟵ لأنها تدفع في **نهاية** كل ٤ شهور

<u>أولاً: البيانات</u>

ط = ٥٠٠ جنيه ، مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٤ شهور

ع = ٨ ٪ ، المدة كلها بالشهور = ٢ × ١٢ = ٢٤ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{٢٤}{٤} = ٦ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة الدفعة الواحدة الشهور

= ٢٤ - ٤ = ٢٠ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$) = صفر

<u>ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)</u>

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٥٠٠ \times ٦ + ٥٠٠ \times \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(٢٠ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$= ٣٠٠٠ + ٢٠٠ = ٣٢٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال

يودع شخص ٢٠٠٠ جنيهاً في أول كل شهرين في صندوق توفير البريد بمعدل ١٠ ٪ سنوياً ، فما هي جملة ما يستحق في نهاية السنة ؟

الحل

<u>أولاً: البيانات</u>

ط = ٢٠٠٠ جنيه ، ع = ١٠ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٢ شهر

<u>ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)</u>

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ٢٠٠٠ \times ٦ + ٢٠٠٠ \times \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(١٢ + ٢)}{١٢}$$

$$= ١٢٠٠٠ + ٧٠٠ = ١٢٧٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال

دفعة فورية مقدارها ٢٠٠٠ جنيه تدفع أول كل شهرين لمدة سنة ونصف بمعدل فائدة بسيطة ١٥٪ ، أوجد الجملة آخر المدة ؟

الحل

أولاً: البيانات

ط = ٢٠٠٠ جنيه ، ع = ١٥ % ، سنة ونصف = ١٨ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٨}{٢} = ٩ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٨ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٢ شهر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٢٠٠٠ \times ٩ + ٢٠٠٠ \times \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{٩}{٢} \times \frac{(١٨+٢)}{١٢}$$

$$= ١٨٠٠٠ + ٢٢٥٠$$

$$= \boxed{٢٠٢٥٠} \text{ جنيه}$$

مثال

أوجد جملة دفعة فورية مبلغها ١٠٠٠ جنيه تدفع أول كل شهرين لمدة سنتين ونصف بمعدل فائدة ٩ % سنوياً .

الحل

أولاً: البيانات

ط = ١٠٠٠ جنيه ، ع = ٩ % ، سنتين ونصف = ٣٠ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥ \text{ دفعة}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور = ٣٠ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٢ شهر

ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ١٥ + ١٠٠٠ \times \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{(٣٠ + ٢)}{١٢}$$

$$= ١٥٠٠٠ + ١٨٠٠$$

$$= \boxed{١٦٨٠٠} \text{ جنيه}$$

أنواع خاصة من الدفعات

في بعض الأحيان يتم إيداع الدفعات في يوم ١٠ من كل شهر، أو في منتصف الشهر، أو في يوم ٢٠ من كل شهر ٠٠٠٠إلخ وفي تلك الحالات يمكن التوصل إلى عدد الدفعات (د) ، مدة استثمار الدفعة الأولى بالشهور ($ن_1$) ، مدة استثمار الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ر$) بدون استخدام القوانين أو القواعد السابق بيانها والمستخدمة في حالة الدفعات العادية وغير العادية ويفضل عند التعامل مع هذه الدفعات استنتاج بيانات التمرين من خلال رسم خط الزمن من بداية دفع الدفعات وحتى تاريخ طلب الرصيد مع مراعاة الآتي:

- مدة استثمار أي دفعة يتم احتسابها بالشهور من تاريخ دفع تلك الدفعة حتى تاريخ طلب الرصيد (تاريخ حساب الجملة).
- إعتبار أن عدد أيام أي شهر تساوي ٣٠ يوم، وبالنسبة لكسور الشهر يتم إعتبار أن ١٠ أيام تمثل ($\frac{١}{٣}$) شهر، ويتم إعتبار أن ٢٠ يوم تمثل ($\frac{٢}{٣}$) شهر، إعتبار أن ١٥ يوم تمثل ($\frac{١}{٢}$) شهر

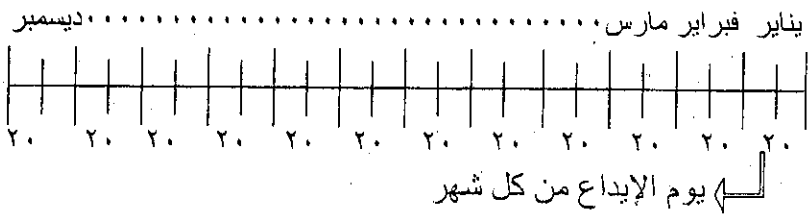
مثال

يودع شخص ٣٠٠ جنيهاً يوم ٢٠ من كل شهر لمدة سنة بمعدل فائدة بسيطة ١٥٪ ، فما هي الجملة آخر العام ؟

الحل

أولاً: البيانات

ط = ٣٠٠ جنيه   ن = ١٢   ع = ١٥٪



عدد الدفعات (د) = من الرسم = ١٢ دفعة

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

$$ن_١ = ١١ \text{ شهر} + ١٠ \text{ أيام} = ١١\frac{١}{٣} \text{ شهر}$$

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

$$= ١٠ \text{ أيام} = \frac{١}{٣} \text{ شهر}$$

<u>ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)</u>

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٣٠٠ \times ١٢ + ٣٠٠ \times \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{\left(١١\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}\right)}{١٢}$$

$$= ١٨٠٠٠ + ٢٦٢,٥$$

$$= \boxed{١٨٢٦٢,٥} \text{ جنيه}$$

مثال

دفعة دورية متساوية قيمتها ١٠٠٠ جنيه يتم دفعها فى أحد البنوك فى أول ومنتصف كل شهر لمدة سنة والمطلوب حساب جملة الدفعات فى البنك فى نهاية السنة إذا كان معدل الفائدة البسيطة ٨ % سنوياً.

الحل

<u>أولاً: البيانات</u>

ط = ١٠٠٠ جنيه ، ع = ٨ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٠,٥} = ٢٤ \text{ دفعة}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ٠,٥ شهر

<u>ثانيا: الرصيد (جملة الدفعات)</u>

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ٢٤ + ١٠٠٠ \times \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٢٤}{٢} \times \frac{(١٢ + ٠,٥)}{١٢}$$

$$= ٢٤٠٠٠ + ١٠٠٠ = ٢٥٠٠٠ \text{ جنيه}$$

إيجاد مبلغ الدفعة

إذا كان مبلغ الدفعة غير معلوم فمن البديهى فى تلك الحالة أن يكون رصيد الشخص (أى جملة الدفعات) معلوماً حتى نتمكن من تطبيق قانون جملة الدفعات، ولا يحتاج الأمر سوى تجهيز البيانات المعطاة ثم التعويض المباشر فى طرفى قانون جملة الدفعات فنحصل على مبلغ الدفعة المتساوية، وإذا كان المعلوم هو قيمة مجموع فوائد الدفعات فيمكن التوصل لقيمة مبلغ الدفعة المتساوية من خلال التعويض المباشر فى طرفى قانون مجموع فوائد الدفعات التالى:

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

مثال

يودع شخص في بنك الدلتا أول كل شهرين مبلغاً معيناً وقد وجد أن جملة ما يستحق له في نهاية السنة هو ١٥٧٠ جنيهاً فإذا كان معدل الفائدة ٨٪ ، فما هي قيمة الدفعة المتساوية التي يودعها؟

الحل

أولاً: البيانات

جملة الدفعات = ١٥٧٠ ج   دفعات غير عادية   كل شهرين

سنة = ١٢ شهر   ع = ٨ %   ط = ؟

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور

= ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ن$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور

= شهرين

ثانيا: تطبيق قانون جملة الدفعات

$$ج = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ن)}{١٢}$$

$$١٥٧٠ = ط \times ٦ + ط \times \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(١٢ + ٢)}{١٢}$$

$١٥٧٠ = ٦ ط + ٠,٢٨ ط$

$١٥٧٠ = ٦,٢٨ ط$

$ط = \frac{١٥٧٠}{٦,٢٨}$

$= \boxed{٢٥٠}$ جنيه

إيجاد معدل الفائدة المستخدم في حساب جملة الدفعات

إذا كان معدل الفائدة البسيطة غير معلوم فمن البديهى فى تلك الحالة أن يكون رصيد الشخص (أى جملة الدفعات) معلوماً حتى نتمكن من تطبيق قانون جملة الدفعات، ولا يحتاج الأمر سوى تجهيز البيانات المعطاة ثم التعويض المباشر فى طرفى قانون جملة الدفعات فنحصل على معدل الفائدة البسيطة. أيضاً إذا كان المعلوم هو قيمة مجموع فوائد الدفعات فيمكن التوصل لمعدل الفائدة البسيطة المستخدم فى حساب الفوائد من خلال التعويض المباشر فى طرفى قانون مجموع فوائد الدفعات التالى:

$$\text{مجموع فوائد الدفعات} = ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_1 + ن_ل\right)}{١٢}$$

مثال

دفعة عادية ربع سنوية مبلغها ١٠٠٠ جنيه ومدتها سنة ونصف، فإذا وجدنا أن جملة هذه الدفعة ٦٤٥٠ جنيه، فما هو معدل الفائدة البسيطة المستخدم ؟

الحل

<u>أولاً: البيانات</u>

جملة الدفعات = ٦٤٥٠ ج	دفعات عادية	كل ٣ شهور
سنة ونصف = ١٨ شهر	ع = ؟	ط = ١٠٠٠ج

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٨}{٣} = \text{٦ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور − مدة الدفعة الواحدة بالشهور

= ١٨ − ٣ = ١.٥

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ر$) = صفر

ثانيا: <u>تطبيق قانون جملة الدفعات</u>

$$ج = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$٦٤٥٠ = ١٠٠٠ \times ٦ + ١٠٠٠ \times ع \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(١٥ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$٦٤٥٠ = ٦٠٠٠ + ٣٧٥٠\,ع$$

$$٦٤٥٠ - ٦٠٠٠ = ٣٧٥٠\,ع$$

$$٤٥٠ = ٣٧٥٠\,ع$$

$$ع = \frac{٤٥٠}{٣٧٥٠} = ٠,١٢$$

$$= ٠,١٢ \times ١٠٠$$

$$\text{المعدل} = \boxed{١٢\%}$$

مثال

يودع تاجر مبلغ ٥٠٠ جنيه أول كل شهر من شهور عام ٢٠١٤ ومبلغ ١٠٠٠ جنيه آخر كل شهرين من نفس العام ، إحسب مجموع ما يستحق لهذا التاجر فى نهاية عام ٢٠١٤، إذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ٩ % سنوياً.

الحل

رصيد التاجر = جملة دفعات الـ ٥٠٠ + جملة دفعات الـ ١٠٠٠

١) <u>دفعات الـ ٥٠٠ جنيه</u>

ايداعات ط = ٥٠٠ دفعات فورية شهرية لمدة سنة ع = ٩ %

<u>أولاً: البيانات</u>

ط = ٥٠٠ جنيه شهرياً ، ع = ٩ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{١} = ١٢ \text{ دفعة}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور = ١٢ شهر

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$)

= مدة الدفعة الواحدة بالشهور = ١ شهر

<u>ثانيا: الرصيد (جملة دفعات الإيداع الأولى)</u>

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٥٠٠ \times ١٢ + ٥٠٠ \times \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{(١٢+ ١)}{١٢}$$

$$= ٦٠٠٠ + ٢٩٢,٥ = ٦٢٩٢,٥ \text{ جنيه}$$

٢) دفعات الـ ١٠٠٠ جنيه

ط = ١٠٠٠ ج دفعات عادية آخر كل شهرين سنة = ١٢ شهر

أولاً: البيانات

سنة = ١٢ شهر ع = ٩ % ط = ١٠٠٠ ج

$$\text{عدد الدفعات (د)} = \frac{\text{مدة الدفعات بالشهور}}{\text{مدة الدفعة الواحدة بالشهور}} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ دفعات}$$

حساب مدة الدفعة الأولى بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور – مدة الدفعة الواحدة بالشهور

$$= ١٢ - ٢ = ١٠$$

حساب مدة الدفعة الأخيرة بالشهور ($ن_ل$) = صفر

ثانيا: تطبيق قانون جملة الدفعات

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ١٠٠٠ \times ٦ + ١٠٠٠ \times \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(١٠ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$= ٦٠٠٠ + ٢٢٥$$

$$= ٦٢٢٥ \text{ جنيه}$$

٣) رصيد الشخص

رصيد التاجر = جملة دفعات الـ ٥٠٠ + جملة دفعات الـ ١٠٠٠

= ٦٢٩٢,٥ + ٦٢٢٥

= $\boxed{١٢٥١٧,٥}$ جنيه

مثال

يودع شخص في بنك عودة مبلغاً معيناً أول كل شهر اعتبارا من أول أبريل ٢٠١٤ وكان يودع ضعف هذا المبلغ في منتصف كل شهر أيضاً من ابريل سنة ٢٠١٤ فإذا كان إجمالي مستحقاته في نهاية ٢٠١٤ هو مبلغ ٢٨٠٥٠ جنيهاً فإذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة ١٠ ٪ ، فما هو مقدار المبلغ الذي يودعه في أول ومنتصف كل شهر ؟

الحل

بيانات الدفعة الأولى	**بيانات الدفعة الثانية**
بفرض أن مبلغ الدفعة الأولى = ط	بفرض أن مبلغ الدفعة الثانية = ٢ط
∴ د = ٩ دفعات	∴ د = ٩ دفعات
$ن_١$ = ٩ شهور	$ن_١$ = ٨.٥ شهر
$ن_ر$ = شهر واحد	$ن_ر$ = نصف شهر

جـ = ٢٨٠٥٠ ع = ١٠ ٪ د = ؟

جملة الدفعة الأولى ($جـ_١$)

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ن)}{١٢}$$

$$جـ_١ = ط \times ٩ + ط \times \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{٢} \times \frac{(٩+١)}{١٢}$$

= ٩ ط + ٠,٣٧٥ ط

= ٩,٣٧٥ ط

جملة الدفعة الثانية (جـ٢)

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$جـ_٢ = ٢ط \times ٩ + ٢ط \times \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{٢} \times \frac{(٨,٥ + ٠,٥)}{١٢}$$

= ١٨ ط + ٠,٦٧٥ ط

= ١٨,٦٧٥ ط

∴ إجمالي الدفعتين في آخر السنة = جـ١ + جـ٢

= ٩,٣٧٥ ط + ١٨,٦٧٥ ط

= ٢٨,٠٥ ط

إجمالى مستحقات = إجمالي الدفعتين في آخر السنة

∴ ٢٨٠٥٠ = ٢٨,٠٥ ط

$$∴ ط = \frac{٢٨٠٥٠}{٢٨,٠٥}$$

= ١٠٠٠ ج ← وهو مبلغ الدفعة الأولى

∴ مبلغ الدفعة الثانية = ٢ ط

= ٢ × ١٠٠٠

= ٢٠٠٠ ج ← وهو مبلغ الدفعة الثانية

مثال

يودع شخص ٢٠٠ جنيهاً في أول ومنتصف كل شهر بينما يسحب ٣٠٠ جنيهاً آخر كل ٣ شهور فإذا كان معدل الفائدة ٦٪ أوجد الرصيد في نهاية السنة ؟

الحل

بيانات الإيداع	بيانات السحب
نوع الدفعات ← فورية	نوع الدفعات ← عادية
ط = ٢٠٠ جنيه	ط = ٣٠٠ جنيه
د = ٢٤ دفعة	$د = \frac{١٢}{٣} = ٤$ دفعات
$ن_١$ = ١٢ شهر	$ن_١$ = ١٢ – ٣ = ٩ أشهر
$ن_ل$ = ٠,٥ شهر	$ن_ل$ = صفر

ع = ٦ ٪

إيجاد جملة دفعات الإيداع:

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٢٠٠ \times ٢٤ + ٢٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٢٤}{٢} \times \frac{(١٢ + ٠,٥)}{١٢}$$

$$= ٤٨٠٠ + ١٥٠ = ٤٩٥٠ \text{ جنيه}$$

إيجاد جملة دفعات السحب:

$$جـ = ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٣٠٠ \times ٤ + ٣٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٤}{٢} \times \frac{(٩ + \text{صفر})}{١٢}$$

$$= ١٢٠٠ + ٢٧ = ١٢٢٧ \text{ جنيه}$$

إيجاد الرصيد

∵ **الرصيد** = جملة الإيداعات - جملة المسحوبات

= ٤٩٥٠ - ١٢٢٧

= $\boxed{٣٧٢٣}$ جنيه

تمارين الدفعات

(١) أودع شخص ٦٠٠ جنيهاً في نهاية كل شهرين لمدة سنة ونصف حيث وجد أن رصيده في نهاية السنة و نصف هو ٥٩٤٠ جنيهاً ، فما هو معدل الفائدة البسيطة ؟

(٢) يودع شخص ٥٠٠ جنيهاً في أول ومنتصف كل شهر إبتداء من أول إبريل ٢٠١٢ وحتى نهاية يناير ٢٠١٣ ثم بدأ بعد ذلك مباشرة بإيداع ٧٠٠ جنيهاً في أول ومنتصف كل شهر حتى نهاية سبتمبر ٢٠١٣ ، ما هى جملة مستحقاته في نهاية سبتمبر ٢٠١٣ علماً بأن معدل الفائدة ١٥٪ سنوياً.

(٣) يودع شخص ٢٠٠ جنيهاً في آخر كل شهر لمدة سنة في أحد البنوك وقد وجد أن جملة ما يستحق له في نهاية السنة هو ٢٥١٠ جنيهاً ، فما هو معدل الفائدة ؟

(٤) أودع شخص ٩٠٠ جنيهاً أول كل شهرين لمدة سنة كاملة ثم بدأ يودع ٤٠٠ جنيهاً في أول كل شهرين لمدة سنة أخري فإذا كان معدل الفائدة ١٥٪ ، فما هو رصيده آخر الفترة ؟

(٥) يودع شخص ١٦٠٠ جنيه في أول كل شهر ويسحب ٧٠٠ جنيهاً في منتصف كل شهر ، فإذا كان معدل الفائدة ١٢٪ سنوياً ، فما هو رصيد هذا الشخص في نهاية السنة ؟

(٦) تودع شركة في بنك مصر مبلغ معين في أول كل ثلاثة شهور لمدة سنتين وحيث وجدت أن رصيدها في نهاية المدة ٢٢٢٥ جنيهاً فإذا كان معدل الفائدة البسيطة ١٠٪ ، فما هى قيمة الدفعة المودعة ؟

(٧) يودع شخص في أول كل شهرين مبلغاً معيناً ، فإذا وجد أن جملة ما يستحق له في نهاية العام هو ٣٩٢٠ جنيهاً فإذا كان معدل الفائدة البسنوى ١٢ ٪ ، فما هى قيمة الدفعة المتساوية .

(٨) إذا كانت لدينا دفعة ربع سنوية مبلغها ٥٠٠ جنيه ومدتها سنتين وتحسب لها فوائد بسيطة بمعدل ٤% سنوياً، فأوجد جملة هذه الدفعة إذا كانت الدفعات (أولاً) عادية. (ثانياً) فورية .

(٩) أوجد جملة دفعة نصف سنوية تبلغ قيمتها الدورية ٣٠٠ جنيه وتدفع ذلك لمدة سنتين وبفائدة بسيطة بمعدل ٥ % سنوياً إذا كانت الدفعات:

(أ) عادية. (ب) فورية.

(١٠) أوجد جملة دفعة عادية ربع سنوية مبلغها الدورى ٣٠٠ جنيه ومدتها سنتين على أساس معدل فائدة بسيطة ١٢ % سنوياً.

(١١) أوجد جملة دفعة فورية مبلغها الدورى ٧٠٠ جنيه ويدفع أول كل شهر لمدة سنة ونصف بمعدل فائدة ٨% سنوياً.

(١٢) أودع شخص فى بنك فى أول وفى منتصف كل شهر ٥٠٠ جنيه لمدة سنة ونصف على أساس معدل فائدة بسيطة ٤% سنوياً. أوجد جملة ما لهذا الشخص فى البنك فى نهاية هذه المدة .

(١٣) أودع شخص فى البنك ٦٠٠ جنيه فى أول ومنتصف كل شهر لمدة سنة واحدة والمطلوب حساب رصيد هذا الشخص فى البنك فى نهاية السنة إذا كان معدل الفائدة البسيطة المستخدم ٩% سنوياً.

(١٤) يدخر عياد مبلغاً معيناً أول كل شهر فى صندوق التوفير بمعدل فائدة سنوية ١٢%. فإذا علم أن رصيد هذا الشخص فى نهاية سنة ونصف هو ٣٨٠٠ جنيه. المطلوب إيجاد مبلغ الدفعة.

الفصل الثالث

التحليل الرياضي للخصم التجاري والخصم الصحيح والعلاقات الرياضية بين نوعى الخصم

مقدمة

إذا كان هنك دين يستحق السداد بعد مدة معينة فمبلغ هذا الدين فى نهاية تلك المدة يسمى "بالقيمة الاسمية"، فإذا أرادنا سداد القيمة الاسمية قبل *ميعاد استحقاقها، فإن المبلغ الذى يتم سداده فى هذه الحالة سيقل عن القيمة* الاسمية، ويسمى المبلغ الأقل المدفوع فى التاريخ السابق المبكر لسداد الدين "بالقيمة الحالية" ،والفرق بين القيمة الحالية والقيمة الاسمية لهذا الدين يسمى "بالخصم " كما على الخصم أحياناً فى البنوك لفظ "الحطيطة"

فإذا فرضنا أن شخص مدين لأخر بمبلغ ١٠٠٠ جنيه ، تستحق السداد بعد ستة شهور من الآن ، وأراد المدين أن يسدد دينه حالاً ، فإنه لا يقوم بسداد الـ ١٠٠٠ جنيه كلها، ولكنه سيدفع مبلغ ما وليكن ٩٧٠ جنيه ، والمبلغ الأخير هو القيمة الحالية للدين، والخصم أو الحطيطة عبارة عن الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية لهذا الدين وهو مبلغ ٣٠ جنيه وهو مقابل الفائدة المستحقة على هذا الدين بين تاريخى الاستحاق والسداد، وبناء عليه فإن :

- القيمة الحالية = القيمة الاسمية – الخصم (الحطيطة)
- الخصم (الحطيطة) = القيمة الاسمية – القيمة الحالية
- القيمة الاسمية = القيمة الحالية + الخصم (الحطيطة)

والتطبيقات على الخصم كثيرة فى الحياة المالية والتجارية، حيث أنه من الشائع سداد الديون فى المعاملات التجارية بأوراق تجارية كالسندات والكمبيالات والتى تستحق السداد بقيمتها الاسمية فى تاريخ لاحق لتاريخ تحريرها ، لكن نظراً لإعتبارات السيولة وحاجة الدائنين الذين فى حوزتهم مثل هذه الأواق للأموال السائلة، لتسيير أعمالهم، فعادة ما يلجأ هؤلاء الدائنون إلى بيع ما يحوزنه من أوراق تجارية إلى أحد البنوك

التجارية، ويحصلون على قيمتها الحالية ، والعملية التى يقوم بها البنك هنا تسمى عملية خصم أو قطع الأوراق التجارية، حيث يقوم البنك بخصم مبلغاً مقابل دفع قيمة هذه الأوراق قبل ميعاد استحقاقها .

ويسمى المبلغ المستقطع هنا بالحطيطة، وتعرف المدة من تاريخ الخصم أو القطع حتى تاريخ الاستحقاق الأصلى للورقة التجارية، باسم مدة الخصم ، فى حين يطلق على القيمة التى يدفعها البنك للدائن بعد الخصم، اسم القيمة الحالية للورقة، أما قيمة الدين الأصلى فتسمى بالقيمة الاسمية .

تعاريف

فى ضوء ما تقدم يمكن التاكيد على المفاهيم التالية:

القيمة الاسمية: هى القيمة المستحقة الدفع فى تاريخ معين، وقد يتم إثباتها فى ورقة تجارية .

الخصم : هو مبلغ معين يتم التنازل عنه خصماً من القيمة الاسمية للدين فى مقابل الحصول على الدين قبل موعد استحقاقه الدين، والخصم يشبه الفائدة فى طريقة حسابه.

القيمة الحالية هى الفرق بين القيمة الاسمية للدين وقيمة الخصم المتنازل عنه، فى التاريخ السابق لتاريخ الاستحقاق.

تاريخ الاستحقاق: هو التاريخ الذى يجب على المدين أن يدفع فيه القيمة الاسمية للدين.

تاريخ الخصم : هو تاريخ سابق لتاريخ الاستحقاق وهو التاريخ الذى يتم فيه دفع القيمة الحالية للدين ويسمى أيضاً باسم تاريخ القطع.

معدل الخصم : نسبة مئوية تحسب بها الخطيطة .

مدة الخصم : هى المدة المحصورة بين تاريخ الاستحقاق و تاريخ الخصم.

أنواع الخصم

هناك نوعين من الخصم وهما "الخصم التجارى أو الحطيطة الخارجية " و "الخصم الصحيح أو الحطيطة الداخلية".

أولاً : الخصم التجارى:

ويطلق عليه أحيانا الحطيطة الخارجية وتتخذ هنا القيمة الاسمية كأساس لحساب الخصم، كما أن القيمة الحالية الناتجة فى مثل هذه الجالة تسمى بالقيمة الحالية التجارية .

ثانياً : الخصم الصحيح:

ويطلق عليه أحياناً الحطيطة الداخلية وفى هذا النوع من الخصم تتخذ القيمة الحالية الصحيحة كأساس لحساب الخصم، كما أن القيمة الحالية الناتجة فى مثل هذه الحالة تسمى بالقيمة الحالية التجارية .

الرموز المستخدمة

القيمة الاسمية ⟸ ق س

القيمة الحالية التجارية ⟸ ق ح ت

القيمة الحالية الصحيحة ⟸ ق ح ص

الخصم التجارى (الحطيطة الخارجية) ⟸ خ ت

الخصم الصحيح (الحطيطة الداخلية) ⟸ خ ص

معدل الخصم ⟸ ع

مدة الخصم ⟸ ن

القوانين:

يوجد ثلاث مجموعات من القوانين وهى:

أولاً : قوانين الخصم التجارى:

- من التعاريف السابقة تبين أن القيمة الاسمية تتخذ كأساس لحساب الخصم التجارى، وبناءاً عليه فالخصم التجارى عبارة عن فائدة يتم احتسابها على أساس القيمة الأسمية للدين وبالتالى يمكن استنتاج قانون الخصم التجاري من القانون الأساسى للفائدة، وذلك باستبدال المبلغ (أ) بالقيمة الأسمية (ق س) كما يلى:

الخصم التجارى = القيمة الاسمية × المعدل × المدة

أى أن:

$$\boxed{\text{خ ت} = \text{ق س} \times \text{ع} \times \text{ن}} \quad \text{———— (١)}$$

- وبعد الحصول على قيمة الخصم التجارى، إذا تم طرحه من القيمة الأسمية سنحصل على القيمة الحالية التجارية، بمعنى أن:

القيمة الحالية التجارية = القيمة الاسمية - الخصم التجارى

أى أن:

$$\boxed{\text{ق ح ت} = \text{ق س} - \text{خ ت}} \quad \text{———— (٢)}$$

ثانياً : قوانين الخصم الصحيح:

- فى هذا النوع من الخصم تتخذ القيمة الحالية الصحيحة كأساس لحساب الخصم بمعنى أن الخصم الصحيح هو فائدة القيمة الحالية الصحيحة:

الخصم الصحيح = القيمة الحالية الصحيحة × المعدل ×مدة الخصم

<u>أى أن:</u>

خ ص = ق ح ص × ع × ن ——————— (٣)

- لكن المشكلة التى تواجهنا فى تطبيق القانون السابق رقم (٣) هى عدم معرفتنا مقدماً بمقدار القيمة الحالية الصحيحة ولذلك يجب علينا قبل تطبيق القانون رقم (٣) حساب القيمة الحالية الصحيحة، وذلك باستخدام الصيغة التالية:

— (٤)

- وقد يتم حساب الفرق بين القيمة القيمة الاسمية والقيم الحالية الصحيحة بشرط أن تكون معلومة مسبقاً ضمن بيانات التمرين فنحصل على الخصم الصحيح أو الحقيقى وقد يسمى أيضاً بالحطيطة الداخلية أى أن:

الخصم الصحيح = القيمة الاسمية ـ القيمة الحالية الصحيحة

خ ص = ق س - ق ح ص ——————— (٥)

ملاحظات:

- إذا لم يذكر في التمرين نوع الخصم يفترض انه **خصم تجارى**
- دائماً الخصم التجاري **أكبر من** الخصم الصحيح
- في مسائل الخصم **دائماً** عدد أيام السنة **٣٦٠ يوم**
- إذا كانت المدة بالأيام فيتم تحويلها إلي مدة سنوية وذلك بقسمة المدة **بالأيام** على **٣٦٠** سواء كان الخصم تجارى أو صحيح ، أما إذا كانت المدة **بالشهور** فنقسمها على **١٢**
- إذا أعطي في التمرين تاريخين أحدهما تاريخ السداد الفعلي والآخر تاريخ الاستحقاق فيجب حساب المدة بينهم بالأيام طبقاً للقاعدة الآتية:

(يوم السداد لا يحسب أما يوم الاستحقاق يحسب)

- قبل حساب قيمة الخصم يجب أن يكون **المعدل سنوي**
- لإيجاد قيمة الخصم سواء التجاري أو الصحيح فيجب تحديد قيمة كل من الخصم ومدة الخصم

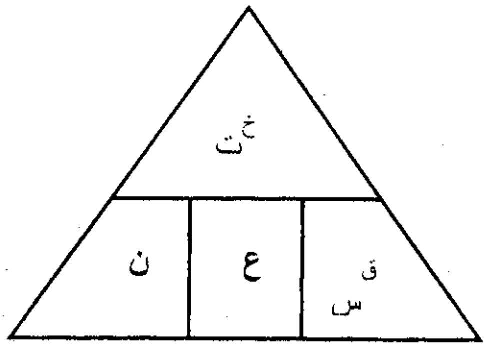
- المبلغ الذي يدفعه المدين للدائن أو المبلغ المدفوع فعلاً يسمي **القيمة الحالية**
- إذا طلب إيجاد **المعدل أو المدة** بمعلومية القيمة الاسمية فيتم اتباع الآتي :

  - يتم حساب الخصم التجاري خ ت حيث :

    خ ت = ق س - ق ح ت

  - حساب المجهول بتطبيق قانون الخصم التجاري :

    خ ت = ق س × ع × ن



- عندما يكون ناتج ن كسور (نضرب) × ١٢ إيجاد المدة بالشهور ، ونضرب× ٥٢ لإيجاد المدة بالأسابيع أو نضرب ٣٦٠ لإيجاد المدة بالأيام

مثال :

شخص مدين بمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه يستحق السداد بعد ٩ شهور، فإذا علمت أن معدل الخصم ٦ % أوجد كل من :

١ ـ القيمة الحالية التجارية.

٢ ـ الخصم التجارى.

٣ ـ القيمة الحالية الصحيحة.

٤ ـ الخصم الصحيح.

الحل

ق س = ١٠٠٠٠ ج ، ن = ٩ شهور ، ع = ٦ %

١ ـ الخصم التجارى (خ ت):

خ ت = ق س × ع × ن

$$خ ت = ١٠٠٠٠ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢} = ٤٥٠ \text{ جنيه}$$

١ ـ القيمة الحالية التجارية (ق ح ت):

ح ت = ق س - ق ح ت

ح ت = ١٠٠٠٠ - ٤٥٠ = ٩٥٥٠ جنيه

٣ ـ القيمة الحالية الصحيحة (ق ح ص):

= ٩٥٦٩,٤

٤ ـ الخصم الصحيح (خ ص): يمكن إيجاده بإحد طريقتين:

الأولى:

خ ص = ق ح ص × ع × ن

$$خ ص = ٩٥٦٩,٤ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢} = \boxed{٤٣٠,٦} \text{ جنيه}$$

الثانية:

خ ص = ق س - ق ح ص = $\boxed{٤٣٠,٦}$ جنيه (نفس الإجابة)

مثال

كمبيالة قيمتها الاسمية ٣٤٥٠ جنيه تستحق في ٢٣ سبتمبر ٢٠١٥ أراد المدين أن يسددها في ٢٦ مايو ٢٠١٥ فإذا علمت أن معدل الخصم ١٨% ، أوجد الخصم التجاري والقيمة الحالية

الحل

ق س = ٣٤٥٠ جنيه ، ع = ١٨ % ، خ ت = ؟ ، ق ت = ؟

تاريخ القطع	تاريخ الاستحقاق
٢٠١٥/٥/٢٦	٢٠١٥/٩/٢٣

حساب المدة بالأيام

	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	
ن =	٥ +	٣٠ +	٣١ +	٣١ +	٢٣	= ١٢٠ يوم

إيجاد الخصم التجارى :

خ ت = ق س × ع × ن

$$= ٣٤٥٠ \times \frac{١٨}{١٠٠} \times \frac{١٢٠}{٣٦٠} = ٢٠٧ \text{ جنيه}$$

إيجاد القيمة الحالية التجارية :

ق ح ت = ق س - خ ت

= ٣٤٥٠ _ ٢٠٧ = ٣٢٤٣ جنيه

استنتاج

∵ القيمة الحالية التجارية عبارة عن الفرق بين القيمة الأسمية والخصم التجارى : ق ح ت = ق س - خ ت

لكن:

خ ت = ق س × ع × ن

بالتعويض عن خ ت فى معادلة ق ح ت

ق ح ت = ق س - ق س × ع × ن

وبإخذ (ق س) عامل مشترك نصل إلى: $\boxed{\text{ق ح ت = ق س (١ – ع ن)}}$

مثال

دين يستحق الدفع في ٩ مايو ٢٠١٢ سدده المدين في ٩ فبراير ٢٠١٢ فإذا دفع مبلغاً وقدره ٥٣٤٨ كقيمة حالية وإذا علمت أن معدل الخصم التجاري ١٨ % ، فاحسب القيمة الاسمية ؟

الحل

تاريخ القطع	تاريخ الاستحقاق
٢٠١٢/٢/٩	٢٠١٢/٥/٩

∵ يوم القطع هو نفسه يوم الاستحقاق فيتم حساب المدة بالشهور

ن = ٥ ـ ٢ = ٣ شهور ، ق ح ت = ٥٣٤٨ ، ع = ١٨ %

<u>إيجاد القيمة الأسمية :</u> ق س = ؟

∵ ق ح ت = ق س (١ - ع ن)

$$= \frac{٥٣٤٨}{٠,٩٥٥} = ٥٦٠٠ \text{ جنيه}$$

مثال

كمبيالة تستحق بعد ١٨٠ يوم بلغ الخصم التجاري للكمبيالة ٨٠٠٠ جنيه فإذا كان معدل الخصم ٢٠ ٪ سنوياً ، أحسب القيمة الاسمية للكمبيالة ؟

الحل

خ ت = ٨٠٠٠ جنيه ، ن = ١٨٠ يوم ، ع = ٢٠ ٪

إيجاد القيمة الاسمية :

$$ق س = \frac{خ ت}{ع \times ن}$$

جنيه

تحليل العلاقة بين

الخصم التجارى والصحيح

يشمل التحليل علاقات الفرق بين الخصم التجارى والخصم الصحيح وكذلك النسبة بين الخصمين، وذلك على النحو التالى:

اولاً: الفرق بين الخصم التجارى والخصم الصحيح :

حيث أن :

الخصم التجارى = فائدة القيمة الاسمية

= فائدة (القيمة الحالية الصحيحة + الخصم الصحيح)

= فائدة القيمة الحالية الصحيحة + فائدة الخصم الصحيح(١)

حيث أن :

الخصم الصحيح = فائدة القيمة الحالية الصحيحة (٢)

من (١) ، (٢)

الخصم التجارى = الخصم الصحيح + فائدة الخصم الصحيح (٣)

من (٣)

الخصم التجارى ـ الخصم الصحيح = فائدة الخصم الصحيح

أي أن الخصم التجارى يزيد عن الصحيح بمقدار فائدة الخصم الصحيح

$\boxed{\text{الفرق بين الخصمين = فائدة الخصم الصحيح}}$

الفرق بين الخصمين = الخصم الصحيح × ع × ن (٤)

ثانياً : العلاقة بين الخصم التجارى والخصم الصحيح :

الخصم التجارى = القيمة الاسمية × ع × ن

الخصم الصحيح = القيمة الحالية الصحيحة × ع × ن

بالقسمة ينتج أن :

ومنها :

$$\text{القيمة الحالية الصحيحة} = \text{القيمة الاسمية} \times \frac{\text{الخصم الصحيح}}{\text{الخصم التجارى}}$$

$$\text{القيمة الاسمية} = \text{القيمة الحالية الصحيحة} \times \frac{\text{الخصم التجارى}}{\text{الخصم الصحيح}}$$

أيضاً من (٣)

الخصم التجارى = الخصم الصحيح + فائدة الخصم الصحيح

خ ت = خ ص + خ ص × ع × ن

خ ت = خ ص (١ + ع × ن)

أى أن الخصم التجارى هو جملة الخصم الصحيح، ومنها:

$$\text{خ ص} = \frac{\text{خ ت}}{\text{١ + ع × ن}}$$

مثال

كمبيالة تم قطعها بمعدل ١٢% قبل موعدها بـ ٩٠ يوم فبلغ الخصم الصحيح ١٨ج ، فأوجد الخصم التجاري والقيمة الاسمية ؟

الحل

ع = ١٢% ، ن = ٩٠ يوم ، خ ص = ١٨ج

إيجاد الخصم التجارى

∵ معطى أحد الخصمين ومطلوب الخصم الآخر

∴ نستخدم قانون العلاقة بين الخصمين

$$\text{خ ت} = \text{خ ص} \left(١ + \text{ع ن} \right)$$

$$\text{خ ت} = ١٨ \left(١ + \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٣٦٠} \right)$$

$$= \boxed{١٨,٥٤} \text{ جنيه}$$

إيجاد القيمة الاسمية

يفضل استخدام قانون الخصم التجارى

$$\text{خ ت} = \text{ق س} \times \text{ع} \times \text{ن}$$

$$\therefore \text{ق س} = \frac{\text{خ ت}}{\text{ع} \times \text{ن}} = \frac{١٨,٥٤}{\frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٣٦٠}}$$

$$= \boxed{٦١٨} \text{ جنيه}$$

مثال

إذا كان الفرق بين الخصمين التجاري والصحيح ١٥ جنيه لكمبيالة قطعت بمعدل ١٢% قبل موعدها بستة أشهر واحد المطلوب:

(١) الخصم التجارى (٢) الخصم الصحيح (٣) القيمة الاسمية

الحل

الفرق = ١٥ ج ، ع = ١٢% ، ن = $\frac{٦}{١٢}$

<u>(١) إيجاد الخصم الصحيح بمعلومية الفرق بين الخصمين:</u>

عند إعطاء الفرق بين الخصمين فيتم وضع هذا القانون الأتى مباشرة

الفرق = خ ص × ع × ن

١٥ = خ ص × $\frac{١٢}{١٠٠}$ × $\frac{٦}{١٢}$

١٥ = ٠,٠٦ خ ص

خ ص = $\frac{١٥}{٠,٠٦}$

= ٢٥٠ ج

<u>(٢) إيجاد الخصم التجارى (بمعلومية خ ص)</u>

خ ت = خ ص (١ + ع ن)

= ٢٥٠ × (١ + $\frac{١٢}{١٠٠}$ × $\frac{٦}{١٢}$)

= ٢٦٥ ج

(٣) إيجاد القيمة الاسمية (بمعلومية خ ت)

$$= \frac{٢٦٥}{٠,٠٦}$$

$$= \boxed{٤٤١٦,٦٧} \text{ جنيه}$$

مثال

اثبت أن الفرق بين الخصم التجاري والخصم الصحيح لكمبيالة قيمتها الاسمية ٥٠٠ج تم قطعها قبل موعدها بـ٣ شهور بمعدل ١٢% هو فائدة الخصم الصحيح ؟

الحل

ق س = ٥٠٠ ج ، ن = ٣ شهور ، ع = ١٢ %

المطلوب إثبات أن

$$\boxed{\text{خ ت - خ ص = خ ص × ع × ن}}$$

<u>الطرف الأيمن</u>

<u>الخصم التجارى (خ ت):</u>

خ ت = ق س × ع × ن

$$\text{خ ت} = ٥٠٠ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢} = ١٥ \text{ جنيه}$$

الخصم الصحيح (خ ص):

نوجد القيمة الحالية الصحيحة (ق ح ص) أولاً:

= ٤٨٥,٤ جنيه

إيجاد الخصم الصحيح (خ ص):

يمكن إيجاده بإحد طريقتين:

خ ص = ق س - ق ح ص

= ٥٠٠ ـ ٤٨٥,٤

= ١٤,٦ جنيه

إيجاد الفرق بين الخصمين:

خ ت ـ خ ص = ١٥ ـ ١٤,٦ = $\boxed{٠,٤}$

الطرف الأيسر

إيجاد فائدة الخصم الصحيح = خ ص × ع × ن

$$= ١٤,٦ \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}$$

$$= \boxed{٠,٤}$$

∴ الفرق بين الخصمين هو فائدة الخصم الصحيح.

عناصر خصم الأوراق التجارية

عندما يقوم البنك بخصم أو (قطع) ورقة تجارية - قبل ميعاد استحقاقها - فإن البنك يستقطع مبلغ من القيمة الاسمية للورقة، يتوقف ذلك المبلغ المستقطع على تلك القيمة الأسمية وهو ما أطلق عليه الخصم التجارى، أو الحطيطة الخارجية، كما يتأثر مقدار الخصم بمدة الخصم، فيزيد بطول هذه المدة ويقل بقصرها، أيضا يتاثر مبلغ الخصم بمعدل الخصم فيزيد بزيادته ويقل بنقصانه،ويسمى الفرق بين القيمة الاسمية للورقة التجارية ومقدار الخصم عليها باسم القيمة الحالية التجارية للورقة لكن البنك عادة لا يكتفى بخصم مبلغ الحطيطة السابق فقط عند قطع الأوراق التجارية ولكن هناك عنصرين أخرين يستقطعهما البنك، وهما عمولة البنك، ومصاريف التحصيل، حيث:

<u>عمولة البنك :</u>

وهى عمولة يتقاضاها البنك مقابل قيامه بدور الوسيط بين محرر الكمبيالة و المستفيد، وتوفيره نقود سائلة للمستفيد، وعادة ما تحسب كنسبة فى المائة (أو فى الألف) من القيمة الاسمية للكمبيالة، ومن ثم لا تتأثر العمولة بمدة القطع للورقة التجارية.

<u>مصاريف التحصيل :</u>

وهى مصاريف يتقاضاها البنك مقابل قيامه بتحصيل قيمة الورقة التجارية من المدين وبدون تدخل من المستفيد من هذه الورقة، وتحسب هذه المصاريف كنسبة فى المائة (أو فى الألف) من القيمة الاسمية للورقة، و عادة ما يشترط وجود مبلغ ثابت كحد أدنى كمصاريف تحصيل عن كل ورقة، ومن ثم لا يتأثر أيضاً هذا العنصر بمدة القطع للورقة التجارية .

وقد جرى العرف على أن تضيف البنوك مدة قدرها يوماً واحداً أو يومين (كمهلة) عى مدة الخصم، وذلك للعمل على زيادة مدة الخصم من ناحية، ولإعطاء فرصة معقولة للمدين للقيام بسداد دينه من ناحية أخرى .

ومما تقدم يتضح لنا أن البنك يقوم بخصم ثلاث عناصر مقابل قيامه بقطع الأوراق التجارية وتوفيره لأموال سائلة للمستفيد، أولها الخصم التجارى، وثانيها عمولة البنك، وثالثها مصاريف التحصيل، ومجموع هذه العناصر يطلق عليه "الأجيو".

أى أن :

الأجيو = الخصم التجارى + عمولة البنك + مصاريف التحصيل

ويطلق على صافى ما يسدده البنك للمستفيد مقابل قطع أى ورقة تجارية "صافى القيمة الحالية " أى أن :

صافى القيمة الحالية = القيمة الإسمية – الأجيو

وبالطبع فإن صافى ما يحصل عليه المستفيد يكون أقل من القيمة الحالية التجارية .

ويشار إلى أن البنك يضيف عادة يوم مهلة سداد أو يومين إلى مدة الخصم التى يستخدمها البنك فى حساب الخصم التجارى .

ومن الطبيعى أن معدل الخصم الاجمالى الذى حققه البنك سوف يزيد عن معدل الخصم المعلن ويطلق على معدل الخصم الأجمالى اسم المعدل الحقيقى، فى حين يطلق "المعدل الاسمى" على معدل الخصم.

ويعرف المعدل الحقيقى بأنه معدل الخصم الاجمالى الذى يحصل عليه البنك بالنسبة لوحدة النقود الواحدة من القيمة الاسمية بالنسبة لوحدة الزمن .

$$\text{معدل الخصم الأجمالى} = \frac{\text{الأجيو}}{\text{القيمة الأسمية} \times \underbrace{\text{مدة الخصم}}_{\boxed{\text{بدون مهلة السداد}}}}$$

مثال

كمبيالة تستحق الدفع في ٨ يونيو ١٩٩٥ خصمت لدى بنك مصر في ٣٠ مارس ١٩٩٥ فبلغ صافي الكمبيالة ٢٤٥١.٨٤ جنيه بمعدل خصم ٢٠ % و عمولة ٠,١ % ومصاريف تحصيل $\frac{١}{٨}$ % وكان البنك يضيف مهلة قدرها يومان عند حساب مدة الخصم، احسب كلا من القيمة الاسمية لهذه الكمبيالة ثم احسب معدل الخصم الإجمالي السنوي.

الحل

تاريخ القطع	تاريخ الاستحقاق
٢٠١٥/٣/٣٠	٢٠١٥/٦/٨

حساب مدة الخصم

	مارس (٣١ – ٣٠)		أبريل		مايو		يونيو	
المدة	١	+	٣٠	+	٣١	+	٨	= ٧٠ يوم

يضاف للمدة السابقة يومين مهلة سداد ، المدة بالمهلة = $\boxed{٧٢}$ يوم

صافي الكمبيالة = ٢٤٥١.٨٤ ، ع = ٢٠% عمولة = ٠,١ %

مصاريف تحصيل = $\frac{١}{٨}$ %

الخطوات

تم إضافة يومين مهلة

١) خ ت = ق س × ع × ن

$$= \frac{ق}{س} \times \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٧٢}{٣٦٠} = ٠.٠٤ \text{ ق س}$$

٢) العمولة = ق س × نسبة العمولة

$$= \text{ق س} \times \frac{١}{١٠٠٠} = ٠.٠٠١ \text{ ق س}$$

٣) م . تحصيل = ق س × نسبة م التحصيل

$$= \text{ق س} \times \frac{١}{٨٠٠٠} = ٠.٠٠٠١٢٥ \text{ ق س}$$

٤) الأجيو = خ ت + عمولة + م.تحصيل

= ٠,٠٤ ق س + ٠,٠٠١ ق س + ٠.٠٠٠١٢٥ ق س

= ٠.٠٤٢٢٥ ق س

٥) صافي الكمبيالة = ق س – الأجيو

٢٤٥١.٨٤ = ق س - ٠.٠٤٢٢٥ ق س

٢٤٥١.٨٤ = ٠,٩٥٧٧٥ ق س

$$\frac{٢٤٥١.٨٤}{٠.٩٥٧٧٥} = \frac{٠.٩٥٧٧٥ \text{ ق س}}{٠.٩٥٧٧٥}$$

<u>القيمة الأسمية</u>

ق س = $\boxed{٢٥٦٠}$ جنيه

<u>معدل الخصم الإجمالي</u>

$$\text{معدل الخصم الإجمالي (ع}^*\text{)} = \frac{\text{الأجيو}}{\text{ق س} \times \text{ن}}$$

بدون أيام المهلة

$$\text{ع}^* = \frac{٠,٠٤٢٢٥ \text{ ق س}}{\text{ق س} \times \frac{٧٠}{٣٦٠}}$$

= ٠,٢١٧ × ١٠٠

= $\boxed{٢١,٧}$ %

مثال

إذا كان معدل الخصم الإجمالي السنوي الذي حققه البنك الأمريكي هو ٢٨٪ عند خصم كمبيالة قيمتها الاسمية ٦٠٠ج قطعت قبل موعدها بشهرين والعمولة ٢٪ ومصاريف التحصيل ٢٪ ، فما هو معدل الخصم التجاري للكمبيالة ؟

ع* = ٢٨٪ ، ق س = ٦٠٠ ، ن = $\frac{٢}{١٢}$ ، عمولـــة = ٢٪

م. تحصيل = ٢٪ ، ع = ؟

الأجيو = ق س × ع* × ن

$$= ٦٠٠ \times \frac{٢٨}{١٠٠} \times \frac{٢}{١٢} = ٢٨ج$$

الأجيو = خ ت + عمولة + م. تحصيل

$$٢٨ = خ ت + ٦٠٠ \times \frac{٢}{١٠٠} + ٦٠٠ \times \frac{٢}{١٠٠}$$

$$٢٨ = خ ت + ٢٤$$

$$خ ت = ٢٨ - ٢٤ = ٤ج$$

$$\therefore ع = \frac{خ ت}{ق س \times ن} = \frac{٤}{٦٠٠ \times \frac{٢}{١٢}}$$

$$= \boxed{٤ ٪}$$

استخدام طريقة النمر فى حساب الخصم التجارى

إذا كان هناك عدد من الديون لها تواريخ استحقاق مختلفة ونفس معدل الخصم فإننا يمكن أن نستخدم طريقة النمر التى سبق أن استخدمت فى إيجاد مجموع الفوائد ، وذلك لإيجاد مجموع الخصومات التجارية مع مراعاة أن عدد أيام السنة عند حساب الخصم التجارى هى٣٦٠ يوماً ،لأن الخصم التجارى هو فى الحقيقة عبارة عن فائدة القيمة الاسمية.

مثال:

شركة مدينة بالديون الآتية :

١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٢٠ يوم

١٥٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣٠ يوماً

٢٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤٠ يوم

المطلوب حساب المبلغ الواجب سداده اليوم لجميع هذه الديون علماً بأن معدل الخصم السنوى هو ١٢%.

الحل

١) إيجاد مجموع النمر اليومية

المبلغ		المدد بالأيام	=	النمر اليومية
١٠٠٠٠	×	٢٠	=	٢٠٠٠٠٠
١٥٠٠٠	×	٣٠	=	٤٥٠٠٠٠
٢٠٠٠٠	×	٤٠	=	٨٠٠٠٠٠
مجموع النمر اليومية			=	١٤٥٠٠٠٠

٢) <u>إيجاد مجموع الخصم التجارى للديون الثلاثة</u>

$$\text{مجموع الخصم التجارى} = \text{مجموع النمر} \times \frac{ع}{٣٦٠}$$

$$= ١٤٥٠٠٠٠٠ \times \frac{٠,١٢}{٣٦٠}$$

$$= \boxed{٤٨٣,٣} \text{ جنيه}$$

٣) <u>المبلغ الواجب سداده اليوم لجميع هذه الديون</u>

= القيمة الحالية التجارية للديون الثلاثة

= مجموع القيم الأسمية للديون - مجموع الخصم

$$= (١٠٠٠٠ + ١٥٠٠٠ + ٢٠٠٠٠) - ٤٨٣,٣$$

$$= ٤٥٠٠٠ - ٤٨٣,٣$$

$$= \boxed{٤٤٥١٦,٧} \text{ جنيه}$$

تمارين على الخصم

(١) شركة مدينة بمبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد سنة وثلاثة شهور، والمطلوب إيجاد كل من : القيمة الحالية الصحيحة و الخصم الصحيح والخصم التجارى و القيمة الحالية التجارية لهذا الدين إذا كان معدل الخصم ٥ % سنوياً.

(٢) كمبيالة قيمتها الاسمية ٨٠٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٢٧٠ يوماً، أوجد كل من الخصم التجارى و القيمة الحالية التجارية، إذا قبل قطعها اليوم أحد البنوك التجارية وذلك بمعدل خصم ٩ % سنوياً.

(٣) شركة مدينة بمبلغ٧٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ١٥٠ يوماً. أوجد القيمة الحالية التجارية لهذا الدين إذا كانن معدل الخصم ٦% سنوياً.

(٤) شخص مدين بمبلغ معين يستحق بعد ١٠ شهور، خصم هذا الدين بمعدل ٣% سنوياً فوجد أن قيمته الحالية التجارية ٣٩٠٠ جنيه ، فما هى القيمة الاسمية للدين ؟

(٥) شركة مدينة بمبلغ ٤٠٠٠ جنيه تستحق بعد ١٥٠ يوماً، خصم هذا الدين فوجد أن قيمته الحالية التجارية ٣٩٠٠ جنيه ، فماذا كان معدل الخصم؟

(٦) إذا علمت أن الفرق بين الخصم التجارى والخصم الصحيح لدين يستحق بعد ١٨٠ يوماً بمعدل ١٢ % سنوياً يبلغ ٣٢ جنيهاً. المطلوب :

أ) إيجاد القيمة الاسمية للدين. ب) إيجاد الخصم التجارى.

ج) إيجاد الخصم الصحيح . د) إيجاد القيمة الحالية الصحيحة.

(٧) إذا كان الفرق بين الخصم التجاربوالخصم الصحيح لدين يستحق بعد ١٠ شهور من اليوم هو ١٠ جنيهات، فاحسب القيمة الاسمية لهذا الدين إذا علمت إن معدل الخصم هو ١٢ % سنوياً.

(٨) إذا كان الخصم التجارى لكمبيالة تستحق الدفع بعد سنة وشهرين بمعدل ٨% سنوياً هو ١٢١,٦ جنيهاً فما هو الخصم الصحيح؟ ما هى القيمة الاسمية للكمبيالة؟

(٩) إذا كان معدل الخصم الإجمالى السنوى الذي حققه البنك الأهلى هو ٢٨٪ وذلك عند خصم كمبيالة قيمتها ١٢٠٠٠ جنيه قطعت قبل موعدها بشهرين وحيث العمولة ٢ ٪ ومصاريف التحصيل ٢ ٪ ، فما هو معدل الخصم التجارى للكمبيالة ؟

(١٠) إذا بلغ الخصم التجارى ١٠ جنيهات لكمبيالة قيمتها الأسمية ٦٠٠ جنيه قطعت قبل موعدها بتسعون يوماً ، فما هو معدل الخصم التجارى المستخدم ؟

(١١) كمبيالة قطعت قبل موعدها بأربعة أشهر في البنك الأهلى فبلغ الأجيو ٩٠ جنيه كما أن معدل الخصم الإجمالى السنوى كان ١٨ ٪ ، فما هي القيمة الأسمية للكمبيالة ؟

(١٢) قدم شخص في ٢٠١٤/٩/١٢ إلي البنك الأهلى كمبيالة قيمتها الأسمية ٨٠٠٠ جنيهاً وتستحق في ٢٠١٥/٢/١٠، فإذا كان معدل الخصم التجارى ١٢٪ وكان البنك يستقطع عمولة ٢٪ ومصاريف تحصيل ١٪ كما أن البنك يضيف يوماً مهلة للسداد ، فأوجد صافى الكمبيالة ؟

(١٣) قدم شخص إلي بنك مصر الكمبيالات التالية في ٢٠١٤/١١/١٥

كمبيالة قيمتها الأسمية ٦٠٠٠ جنيهاً تستحق في ٢٠١٥/١/٢٠

كمبيالة قيمتها الأسمية ٧٠٠٠ جنيهاً تستحق في ٢٠١٥/٣/٦

كمبيالة قيمتها الأسمية ٩٠٠٠ جنيهاً تستحق في ٢٠١٥/٤/١٧

فإذا كان معدل القطع ١٢٪ وأن البنك يقتطع عمولة ٢٪ ومصاريف تحصيل ١ ٪ فما هو صافى هذه الكمبيالات

الفصل الرابع

طرق استهلاك القروض قصيرة الأجل

مقدمة

تلعب القروض دوراً أساسياً فى إتساع الإئتمان وزيادة الثقة التجارية وهى من أهم الأسباب التى تؤدى إلى تطور وانتعاش الحياة الاقتصادية فى بلد ما، ذلك لأنها تعمل على تشجيع أصحاب الأعمال على التوسع فى أعمالهم ومشروعاتهم الحالية، أو بالدخول فى أعمال ومشروعات جديدة ، ولأهمية الدور الذى تلعبه القروض هذا كان لابد من وجود طرق تنظم سداد هذه القروض بشكل يتوافق عليه كل من الدائن (المُقرض) والمدين (المقترض)، بما يؤدى إلى تحقيق المصلحة والعدالة بين الطرفين، وتسمى عملية سداد القروض وفوائدها باسم "استهلاك القروض" وتتنوع طرق استهلاك القروض بما يتيح لطرفى القرض عملية اختيار طريقة السداد (الاستهلاك) الملائمة، وذلك بما يتناسب مع إمكانيات وقدرات المدين المادية من ناحية، وبما يحقق أيضاً مصلحة الدائن من ناحية أخرى مما يؤدى فى النهاية إلى تحقيق الغاية من التوسع فى هذه القروض.

فإذا اقترض شخص ما، مبلغ معين، من منشأة مالية متخصصة فى الإقراض، فإن فى إمكان الطرف الأول (المقترض) أن يسدد القرض وفوائده بطرق مختلفة يتم الاتفاق عليها مع الطرف الثانى (المنشأة المالية المتخصصة فى الإقراض، بما يتفق مع مصلحة كل منهما – وفى إطار الطرق المختلفة لاستهلاك القروض السائدة فى السوق المالية والتجارية – لذا كان علينا عرض ومناقشة الطرق المختلفة لاستهلاك القروض من حيث ، ماهية كل طريقة . والظروف المناسبة لاستخدامها وتحديد إلتزامات كل طرف – المدين والدائن – من أطراف التعاقد قبل الأخر، وذلك بهدف تقييم هذه الطرق من ناحية ووصولاً إلى طرق مناسبة لكل حاله على حدة من ناحية آخرى ويأكيدا للناحية التطبيقية لبعض موضوعات الفائدة البسيطة من ناحية ثالثة .

أنواع القروض

يجب أن ننوه هنا، وقبل تناول طرق استهلاك القروض إلى أن القروض يمكن تقسيمها إلى نوعين رئيسيين، هما :

١ - القروض قصيرة الأجل :

وهى القروض التى تكون آجلها سنة فأقل، وتستند طرق سدادها إلى أسس الفائدة البسيطة .

٢ - القروض طويلة الأجل :

وهى القروض التى يتحدد أجلها بأكثر من سنة، وقد تصل مدد أجلها إلى عشرات السنين، وتستند طرق سدادها إلى أسس الفائدة المركبة .

الطرق المختلفة لاستهلاك القروض :

هناك طرق عديدة لاستهلاك القروض (سداد القروض وفوائدها) نذكر منها:

١ - سداد أصل القرض والفوائد المستحقة عليه دفعة واحدة عند استحقاقه فى **نهاية** مدة القرض.

٢ - سداد أصل القرض فى نهاية مدة نهاية القرض، بينما تسدد فوائد القرض كلها أو بعضها مقدماً فى **بداية** مدة القرض.

٣ - سداد أصل القرض فى نهاية مدة نهاية القرض، بينما تسدد فوائد القرض كلها أو بعضها على **أقساط** متساوية تشبه الدفعات المتساوية خلال مدة القرض .

٤ - سدد أصل القرض فقط على أقساط متساوية بينما تسدد الفوائد على الرصيد المتبقى فى نهاية كل فترة زمنية محددة تتفق مع فترة سداد القسط المتساوى من الأصل.

٥- سداد أصل القرض والفوائد المستحقة عليه فى صورة أقساط متساوية من أصل القرض وفوائده معاً .

وسوف نناقش فيما يلى بعض من هذه الطرق لاستهلاك القروض وذلك لشيوع استخدامها فى الحياة العملية :

أولاً : سداد أصل القرض والفوائد المستحقة عليه دفعة واحدة عند استحقاقه فى نهاية مدة القرض :

وفقاً لهذه الطريقة يقوم المدين بسداد أصل القرض مع الفوائد المستحقة عليه (أى جملة القرض) دفعة واحدة فى نهاية مدة القرض، وعادة ما تستخدم هذه الطريقة فى حالة القروض التى تتم لمشروعات أو عمليات لا تظهر نتائجها إلا فى نهاية مدة محددة، ففى نهاية المدة تكون قد تحققت نتائج أعمال المشروع، وتكون هذه الطريقة مناسبة أيضاً فى حالة الديون قصيرة الأجل، والصغيرة نسبياً، مما يسمح للمدين بدفع المستحق عليه من قرض وفوائد دون مشكلات مالية له .

ولا تختلف هذه الطريقة عما تم دراسته فى الباب الأول عند مناقشة مفهوم الفائدة والجملة والعوامل المؤثرة فى تحديد قيمة كل منهما،حيث يسدد المدين جملة القرض، وهى عبارة عن :

جملة القرض = أصل القرض + الفوائد المستحقة على القرض خلال مدته

ثانياً: سداد أصل القرض فى نهاية مدة القرض، بينما تسدد فوائد القرض كلها أو بعضها مقدماً (فى بداية مدة القرض)

وفقاً لهذه الطريقة يقوم الدائن باستقطاع الفائدة المستحقة على القرض كلها أو بعضها مقدماً، ثم يسلم المدين المبلغ المتبقى بعد الاستقطاع المشار إليه، وفى نهاية مدة القرض يتسلم من المدين قيمة القرض كاملة، أو قيمة القرض مضافاً إليها باقى المستحق عليه من فوائد على حسب الإتفاق. وتستخدم هذه الطريقة عادة فى حالة قروض السيارات والعقارات، كما تستخدم فى نفس الأحوال التى تستخدم فيها الطريقة أولاً، وتختلف عنها فى أن الدائن (البنك) فى هذه الطريقة يكون فى حالة أفضل

لفرض شروطه على المدين (المشترى أو المقترض)، ويترتب على ذلك أن يصبح معدل الفائدة الذى يحققه الدائن من هذه الطريقة أكبر من معدل الفائدة الإسمى الذى تم الاتفاق عليه .

ثالثاً: سداد أصل القرض في نهاية مدة القرض ، بينما تسدد فوائد القرض كلها أو بعضها علي أقساط دورية متساوية خلال أستحقاق القرض:

وفقاً لهذه الطريقة يقوم المدين بسداد أصل القرض في نهاية مدة القرض، أما الفوائد فإنها تدفع علي أقساط دورية متساوية خلال مدة القرض (سواء بالنسبة للفوائد كلها أو بعضها) علي حسب الإتفاق، وتشبه أقساط سداد الفوائد بذلك، الدفعة المتساوية العادية، وتجمع هذه الطريقة بين ظروف أستخدام الطريقتين السابقتين ، وذلك لأن التقسيط يتناول الفوائد فقط، وقد يشمل الفوائد كلها أو بعضها علي حسب الإتفاق، وتسمح هذه الطريقة للدائن باستغلال إقساط الفائدة المسددة في إعادة استغلالها لصالحه مرة اخرى، ومن هنا تأتى ضرورة إلتزام المدين بسداد أقساط الفوائد في مواعيد استحقاقها ، وإلا حسبت عليه فوائد تأخير بمعدل فائدة يختلف قليلاً عن المعدل الأسمى المتفق عليه .

رابعا: سداد أصل القرض فقط علي أقساط متساوية، وتسديد الفوائد علي الرصيد المتبقي من رصيد القرض في نهاية كل فترة زمنية محددة تتفق مع فترة سداد القسط المتساوى من الأصل :

تسمى هذه الطريقة في بعض الاحيان باسم طريقة الأقساط المتناقصة، ذلك لأن الرصيد المتبقى من القرض في نهاية كل فترة زمنية محددة يتناقص باستمزار، ومن ثم فان الفائدة المحسوبة علي الرصيد المتبقى إيضاً تكون في تناقص مستمر لتناقص هذا الرصيد ، ويلاحظ هنا أن قسط استهلاك القرض يتكون من جزءين الجزء الأول: القسط الدورى المتساوى من أصل القرض. والجزء الثانى: الفائدة الدورية علي الرصيد المتبقى من القرض في نهاية كل فترة زمنية، وكلاهما يتناقص بزيادة فترات الإستهلاك، ولذلك نجد أن قسط الإستهلاك الإجمالى للقرض يتناقص أيضاً بصفة مستمرة، حتى يتم استهلاك القرض بالكامل، وتتبع

هذه الطريقة عندما يدر المشروع المستثمر فيه القرض الإيرادات بصفة مستمرة تبدأ مع بداية القرض وتستمر حتى نهاية مدة القرض، وبشرط أن تكون هذه الإيرادات في الفترات الزمنية الأولى أكبر منه في الفترات الزمنية الأخيرة عن مدة القرض، كما نتبع هذه الطريقة عندما يكون الطلب على المال في السوق أكبر من العرض، أى حينما يكون الدائن في موقف أفضل من موقف المدين، وبمقتضى هذه الطريقة نجد أن :

عدد أقساط الاستهلاك =

قيمة القسط الدورى الثابت من أصل القرض =

الفائدة على الرصيد المتبقى من القرض عن الفترة الزمنية الواحدة = رصيد القرض فى بداية هذه الفترة × ع × طول الفترة الزمنية الواحدة

رصيد القرض فى بداية أى فترة زمنية = قيمة القرض – عدد الأقساط المستهلكة من أصل القرض × قيمة القسط الواحد

الفائدة على الرصيد فى بداية الفترة الزمنية الأولى = قيمة القرض × ع × طول الفترة الزمنية الواحدة

القسط الإجمالى للاستهلاك عن أى فترة = القسط الدورى الثابت من أصل القرض + فائدة الرصيد المتبقى من القرض عن هذه الفترة

خامساً: سداد أصل القرض والفوائد المستحقة عليه بصفة دورية على أقساط متساوية من أصل القرض وفوائده معاً :

وفقاً لهذه الطريقة يقوم المدين بسداد القرض وفوائده على أقساط دورية متساوية (ثابتة)، والقسط هنا يسدد فى آخر كل فترة دورية منتظمة، ويشتمل القسط على جزئين الأول: لسداد جزء من قيمة القرض الأصلى، والثانى: لسداد الفوائد المستحقة على القرض، وتناسب هذه المشروعات تجارية التى تدر إيراداً منتظماً خلال فترة حياة المشروع. ويشبه القسط الثابت هنا دفعة عادية متساوية، وسوف يتم تناول هذه الطريقة بشئ من

التفصيل من خلال عرض بعض الحالات التطبيقية و الأمثلة المحلولة وذلك على النحو التالى

لحساب قيمة هذا القسط تستخدم المعادلة التالية :

$\boxed{\text{جملة القرض = جملة الأقساط}}$

والطرف الأيمن من المعادلة السابقة وهو:

$\boxed{\text{جملة القرض = أصل القرض + الفوائد المستحقة عليه}}$

بينما الطرف الأيسر من نفس المعادلة وهو :

$\boxed{\text{جملة الأقساط = مجموع الأقساط + الفوائد المستحقة عليها.}}$

وتحقق المعادلة السابقة العدالة بين كل من المدين والدائن، وقد يتفق معدل الفائدة على القرض ومعدل فائدة على استثمار الأقساط ، أوقد يختلف، بحسب الظروف السائدة فى سوق العرض والطلب على الأموال، وعائد استثمارها، وبالطبع سوف تختلف قيمة القسط الثابت فى حالة اختلاف معدل الفائدة على القرض عن معدل فائدة استثمار الأقساط عنه فى حالة إتفاقهما. وبالطبع ستزيد قيمة القسط لو زاد معدل الفائدة على القرض عن معدل فائدة إستثمار الأقساط المحصلة والعكس صحيح.

فإذا افترضنا أن هناك قرض قيمته (أ) تحسب عليه فائدة بسيطة بمعدل (ع)، لمدة زمنية محددة (ن) وتم استخدام طريقة الأقساط المتساوية من أصل القرض وفوائده معاً فى سداده هو وفوائده، وذلك بقسط ثابت وليكن (ط) وكان عدد الأقساط (د) يتم استثمارها بنفس المعدل السابق (ع) ويستمر السداد خلال الفترة الزمنية (ن)، فإن المعادلة المستخدمة لحساب القسط ستكون على الصورة التالية :

جملة القرض = جملة الأقساط

$$\text{أ} \times (\text{١+ع ن}) = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{\text{٢}} \times \frac{\left(\text{١}^{\text{ن}} + \text{ل}^{\text{ن}}\right)}{\text{١٢}}$$

خطوات إيجاد قيمة القسط المتساوى من الأصل والفائدة معاً:

يمكننا إتباع الخطوات الثلاثة التالية لإيجاد قيمة القسط المتساوى من الأصل والفائدة معاً وتطبيق المعادلة السابقة:

أولاً: إيجاد جملة القرض

يتم تطبيق الخطوات التالية عند حساب جملة القرض :

(١) استخراج بيانات القرض

أ ⟵ أصل القرض

ع ⟵ معدل الفائدة على القرض

ن ⟵ مدة القرض

(٢) تطبيق قانون جملة القرض التالي:

$$\boxed{\text{جملة القرض} = \text{أ} \times (\text{١} + \text{ع ن})}$$

وعند تطبيق قانون جملة القرض يراعى أن يكون المعدل والمدة بالسنوات.

ثانياً: إيجاد جملة الأقساط

يتم تطبيق الخطوات التالية عند حساب جملة الأقساط :

(١) استخراج بيانات الأقساط

مبلغ القسط ⟵ ط

معدل الفائدة على الأقساط ⟵ ع

عدد الأقساط ⟵ د

مدة القسط الأول بالشهور ⟵ ن١

مدة القسط الأخير بالشهور ⟵ ن ل

(٢) تطبيق قانون جملة الأقساط :

$$\boxed{\text{جملة الأقساط} = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{\left(\text{ن}(\text{ن}+١)\right)}{١٢}}$$

ثالثاً : تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

كما يمكن التوصل إلى قيمة القسط المتساوى من الأصل والفائدة معاً (ط) من خلال تطبيق خطوة واحدة فقط تعتمد على القاعدة الأساسية للطريقة وهى:

جملة القرض = جملة الأقساط

وذلك بتطبيق الصيغة المختصرة التالية

$$\text{أ} \times (١+\text{ع ن}) = \text{ط} \times \text{د} + \text{ط} \times \text{ع} \times \frac{\text{د}}{٢} \times \frac{\left(\text{ن}(\text{ن}+١)\right)}{١٢}$$

فنحصل فى خطوة واحدة على قيمة القسط المتساوى (ط) كما يمكننا الحصول على قيمة القرض (أ) بمعلومية باقى البيانات أو التوصل إلى المعدل المستخدم (ع) بمعلومية باقى البيانات الأخرى كماسيتم إيضاحه فى الحالات التطبيقية.

وتضمن الطريقة السابقة قيام المدين بسداد القرض وفوائده بنهاية مدة القرض، كما يلاحظ على هذه الطريقة أنها تقلل من أعباء الفوائد التى يتحملها المدين حيث تكون مجموع الفوائد التى يتحملها المقترض عبارة عن :

مجـ ف = مجموع الأقساط المسددة خلال مدة القرض ـ أصل القرض

أى أن: $\boxed{\text{مجـ ف} = \text{ط} \times \text{د} - \text{أ}}$

جدول استهلاك القرض

هو كشف حساب يتم فيه متابعة القرض وعملية سداد الأقساط أولاً بأول ويتم إعداده بواسطة الطرف الدائن عادة (البنك) ويأخذ جدول الاستهلاك الشكل الآتى :

جملة القرض	جملة الأقساط
××× القرض	××× القسط الأول
××× فائدته	××× فائدته
	××× القسط الثانى
	××× فائدته
	××× القسط الثالث
	××× فائدته
	⋮
	⋮
	وهكذا
××× جملة القرض	××× جملة الأقساط

ويلاحظ أن جملة القرض تشبه فى حسابها جملة مبلغ وحيد مستثمر، ومن ثم فهى تخضع لقانون الجملة السابق دراسته فى الفصل الأول من هذا الكتاب. أما جملة الأقساط فهى تشبه فى حسابها جملة دفعات عادية يتم سدادها فى نهاية كل فترة زمنية، فهى تخضع لقانون جملة الدفعات السابق دراسته فى الفصل الثانى من هذا الكتاب، وقد يكون القسط المتساوى شهرى أى يتم سداده فى نهاية كل شهر بصفة دورية وقد يكون القسط ربع سنوى أى يتم سداده فى نهاية كل ٣ شهور بصفة دورية ...... وهكذا كما يلاحظ أن فائدة القسط الأخير = صفر دائماً، وذلك لأن مدة استثمار القسط الأخير سوف تساوى صفر دائماً (ن ر = صفر) ويمكن حساب فوائد الأقساط كل على حده بطريقة مختصرة حيث فائدة القسط الأخير تساوى (صفر) دائماً وفائدة القسط قبل الأخير تساوى حاصل ضرب (قيمة القسط × معدل الفائدة × مدة القسط الواحد) ولإيجاد فائدة القسط السابق له يتم ضرب الناتج × ٢ ثم × ٣ ثم × ٤ ...... وهكذا، لأن مدد الأقساط تتناقص فى صورة متوالية عددية.

مثال

اشترى تاجر بضاعة من أحد الموردين بمبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه واتفق مع المورد على سداد قيمة البضاعه بأقساط شهرية متساوية من الأصل والفوائد معا خلال عام . فإذا عملت أن معدل الفائدة البسيطة المستخدم ١٢% سنويا. أحسب قيمة القسط الشهرى ومجموع الفوائد التى تحملها المدين .

الحل

أولاً: إيجاد جملة القرض

بالخطوات التالية:

استخراج بيانات القرض

أ = ٥٠٠٠٠ ، ع = ١٠ % ، ن = سنة

تطبيق القانون التالى:

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

$$= ٥٠٠٠٠ \times (١ + \frac{١٢}{١٠٠} \times ١)$$

= ٥٦٠٠٠ جنيه

ثانياً: إيجاد جملة الأقساط

ط = ؟ ، ع = ١٢ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الأقساط (د)} = \frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}} = \frac{١٢}{١} = ١٢ \text{ قسط}$$

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

$= ١٢ - ١ = ١١$ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

<u>تطبيق قانون جملة الأقساط</u>

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ط \times ١٢ + ط \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{\left(١١ + صفر\right)}{١٢}$$

$= ١٢ط + ٠,٦٦ ط$

$= ١٢,٦٦ ط$

<u>ثالثاً : تطبيق المعادلة التالية</u>

جملة القرض = جملة الأقساط

$٥٦٠٠٠ = ١٢,٦٦ ط$

$$ط = \frac{٥٦٠٠٠}{١٢,٦٦}$$

$= ٤٤٢٣,٤$ جنيه

قيمة القسط الشهرى المتساوى = $\boxed{٤٤٢٣,٤}$ جنيه

<u>إيجاد مجموع الفوائد</u>

مجـ ف = ط × د ـ أ

$= ٤٤٢٣,٤ \times ١٢ - ٥٠٠٠٠$

$= \boxed{٣٠٨٠,٨}$ جنيه

مثال

اقترضت مؤسسة من أحد البنوك مبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة ٢٢٪ وكان الاتفاق على أن يتم سداد القرض على أقساط متساوية يتم دفعها كل شهرين من أصل القرض وفوائده في خلال سنة من تاريخ عقد القرض على أن يتم دفع القسط الأول في نهاية الشهرين التاليين لعقد القرض مباشرة.

المطلوب :

أولاً : إيجاد القسط المتساوي.

ثانياً : تصوير جدول استهلاك القرض.

ثالثاً : حساب الفوائد الخاصة بكل قسط.

الحل

أولاً : إيجاد القسط المتساوي

إيجاد جملة القرض

كما يلى :

استخراج بيانات القرض

أ = ٦٠٠٠٠ جنيه ، ع = ٢٢ % ، ن = سنة

تطبيق قانون جملة القرض:

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

$$= ٦٠٠٠٠ \times (١ + \frac{٢٢}{١٠٠} \times ١)$$

= ٧٣٢٠٠ جنيه

إيجاد جملة الأقساط

ط = ؟ ، ع = ٢٢ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الأقساط (د)} = \frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ أقساط}$$

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ٢ = ١٠ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

تطبيق قانون جملة الأقساط

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ط \times ٦ + ط \times \frac{٢٢}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{(١٠ + \text{صفر})}{١٢}$$

= ٦ ط + ٠,٥٥ ط

= ٦,٥٥ ط

تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

٧٣٢٠٠ = ٦,٥٥ ط

$$ط = \frac{٧٣٢٠٠}{٦,٥٥} = ١١١٧٥,٥٧ \text{ جنيه}$$

قيمة القسط المتساوى = ١١١٧٥,٥٧ جنيه

ثانياً : تصوير جدول استهلاك القرض

جملة القرض	جملة الأقساط
٦٠٠٠٠ القرض	١١١٧٥,٥٧ القسط الأول
١٣٢٠٠ فائدته	٢٠٤٨,٨٦ فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × ١٠/١٢)
	١١١٧٥,٥٧ القسط الثاني
	١٢٢٩,٣١ فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × ٨/١٢)
	١١١٧٥,٥٧ القسط الثالث
	١٢٢٩,٣١ فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × ٦/١٢)
	١١١٧٥,٥٧ القسط الرابع
	٨١٩,٥٤ فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × ٤/١٢)
	١١١٧٥,٥٧ القسط الخامس
	٤٠٩,٧٧ فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × ٢/١٢)
	١١١٧٥,٥٧ القسط السادس
	صفر فائدته (١١١٧٥,٥٧ × ٢٢/١٠٠ × صفر/١٢)
٧٣٢٠٠	٧٣٢٠٠

ثالثاً : حساب الفوائد الخاصة بكل قسط

تم حساب الفوائد الخاصة بكل قسط فى الجدول السابق أسفل كل قسط ويلاحظ التناقص التدريجي فى قيمة الفوائد الخاصة بكل قسط نتيجة التناقص التدريجى فى مدة استثمار كل قسط لوجود علاقة طردية بين قيمة الفائدة ومدة القسط المستثمر مع ثبات العوامل الأخرى. ولتسهيل حساب فوائد الأقساط يراعى أن: فائدة القسط الأخير = صفر (ليس له فوائد) فائدة القسط قبل الأخير = (ط × ع × مدة القسط الواحد) ثم نضرب الناتج × ٢ (لنحصل على فائدة القسط السابق له) ٠٠٠ وهكذا

مثال

اقترضت مؤسسة من أحد البنوك مبلغ ١٧٤٤٠ جنيه بمعدل فائدة ٢٤٪ وكان الاتفاق على أن يتم سداد القرض على أربعة أقساط ربع سنوية متساوية من قيمة القرض وفوائده في خلال سنة من تاريخ عقد القرض، على أن يتم دفع القسط الأول فى نهاية ٣ شهور الأولى من تاريخ عقد القرض، المطلوب :

أولاً : إيجاد القسط المتساوي.

ثانياً : تصوير جدول استهلاك القرض.

ثالثاً: حساب مجوع فوائد الأقساط.

الحل

<u>أولاً : إيجاد القسط المتساوي</u>

<u>إيجاد جملة القرض</u>

كما يلى :

<u>استخراج بيانات القرض</u>

أ = ١٧٤٤٠ جنيه ، ع = ٢٤ % ، ن = سنة

<u>تطبيق قانون جملة القرض:</u>

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

$$= ١٧٤٤٠ \times (١ + \frac{٢٤}{١٠٠} \times ١)$$

= ٢١٦٢٥,٦ جنيه

إيجاد جملة الأقساط

ط = ؟ ، ع = ٢٤ % ، سنة = ١٢ شهر

$$\text{عدد الأقساط (د)} = \frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}} = \frac{١٢}{٣} = ٤ \text{ أقساط}$$

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ٣ = ٩ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

تطبيق قانون جملة الأقساط

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ط \times ٤ + ط \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{٤}{٢} \times \frac{(٩ + \text{صفر})}{١٢}$$

= ٤ ط + ٠,٣٦ ط

= ٤,٣٦ ط

تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

٢١٦٢٥,٦ = ٤,٣٦ ط

$$ط = \frac{٢١٦٢٥,٦}{١٢,٦٦} = ٤٩٦٠ \text{ جنيه}$$

قيمة القسط المتساوى الربع سنوى = ٤٩٦٠ جنيه

ثانياً : تصوير جدول استهلاك القرض

جملة القرض	جملة الأقساط
١٧٤٤٠ القرض ٤١٨٥,٦ فائدته	٤٩٦٠ القسط الأول ٨٩٢,٨ فائدته ($٤٩٦٠ \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢}$) ٤٩٦٠ القسط الثاني ٥٩٥,٢ فائدته ($٤٩٦٠ \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢}$) ٤٩٦٠ القسط الثالث ٢٩٧,٦ فائدته ($٤٩٦٠ \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}$) ٤٩٦٠ القسط الرابع صفر فائدته ($٤٩٦٠ \times \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{\text{صفر}}{١٢}$)
٢١٦٢٥,٦ جملة القرض	٢١٦٢٥,٦ جملة الأقساط

ثالثاً: إيجاد مجموع الفوائد

مجـ ف = ط × د ـ أ

= ٤٩٦٠ × ٤ ـ ١٧٤٤٠

= ٢٤٠٠ جنيه

البيع بالأجل

عندما يقوم الشخص بشراء أي بضاعة بالأجل ويقوم بسداد جزء فورى (مقدم) عند الشراء، ثم يطلب تقسيط باقى الثمن فإن مبلغ القرض سيكون : مبلغ القرض (أ) = ثمن الشراء – الجزء المدفوع نقداً

مثال

اشتري شخص بضاعة من تاجر معين ثمنها ١٢٠٠٠٠ جنيه وقد اتفق مع البائع على أن يدفع له مبلغ نقدي قدره ٣٠٠٠٠ جنيه وقت الشراء وأن يمنحه البائع ائتمان (قرض) بالباقي مدته عام كامل يسدد خلال أقساط شهرية متساوية تدفع آخر كل شهر فإذا كان معدل الفائدة ٦ % سنوياً، فما هو القسط الشهري

الحل

بيانات القرض :

ثمن البضاعة = ١٢٠٠٠٠ ج ، المبلغ المدفوع منها نقداً = ٣٠٠٠٠ ج

∴ مبلغ القرض (أ) = ثمن البضاعة - المبلغ المدفوع نقداً

= ١٢٠٠٠٠ - ٣٠٠٠٠

= ٩٠٠٠٠ جنيه

ن = سنة ، ع = ٦ %

تطبيق قانون جملة القرض:

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

$$= ٩٠٠٠٠ \times (١ + \frac{٦}{١٠٠} \times ١)$$

= ٩٥٤٠٠ جنيه

إيجاد جملة الأقساط

ط = ؟ ، ع = ٦ % ، سنة = ١٢ شهر

عدد الأقساط (د) = $\frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}}$ = $\frac{١٢}{١}$ = ١٢ قسط

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ١ = ١١ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

تطبيق قانون جملة الأقساط

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{(ن_١ + ن_ل)}{١٢}$$

$$= ط \times ١٢ + ط \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{(١١ + \text{صفر})}{١٢}$$

= ١٢ ط + ٠,٣٣ ط

= ١٢,٣٣ ط

تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

٩٥٤٠٠ = ١٢,٣٣ ط

ط = $\frac{٩٥٤٠٠}{١٢,٣٣}$ = ٧٧٣٧ جنيه

قيمة القسط المتساوى الربع سنوى = ٧٧٣٧ جنيه

مثال

جهاز علاج طبيعى ثمنه فوراً ٢٠٠٠٠ جنيهاً ولكن عند بيعه بالأجل، يمكن سداد دفعة مقدمة ٢٠ ٪ ويقسط الباقي على أقساط شهرية متساوية لمدة سنة بمعدل فائدة بسيطة ١٢ ٪ ، أوجد القسط المتساوي .

الحل

<u>بيانات القرض :</u>

∵ثمن الجهاز = ٢٠٠٠٠ ج

∵المبلغ المدفوع منها نقداً = ٢٠٠٠٠ × $\frac{٢٠}{١٠٠}$ = ٤٠٠٠ جنيه

∴ مبلغ القرض (أ) = ثمن الجهاز - المبلغ المدفوع نقداً

= ٢٠٠٠٠ - ٤٠٠٠

= ١٦٠٠٠ جنيه

ن = سنة ، ع = ١٢ %

<u>تطبيق قانون جملة القرض:</u>

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

= ١٦٠٠٠ × (١ + $\frac{١٢}{١٠٠}$ × ١)

= ١٧٩٢٠ جنيه

<u>إيجاد جملة الأقساط</u>

ط = ؟ ، ع = ٦ % ، سنة = ١٢ شهر

عدد الأقساط (د) = $\frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}}$ = $\frac{١٢}{١}$ = ١٢ قسط

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ١ = ١١ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

<u>تطبيق قانون جملة الأقساط</u>

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ط \times ١٢ + ط \times \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{\left(١١ + صفر\right)}{١٢}$$

= ١٢ ط + ٠,٦٦ ط

= ١٢,٦٦ ط

<u>تطبيق المعادلة التالية</u>

جملة القرض = جملة الأقساط

١٧٩٢٠ = ١٢,٦٦ ط

$$ط = \frac{١٧٩٢٠}{١٢,٦٦}$$

= ١٤١٥,٥ جنيه

قيمة القسط المتساوى الربع سنوى = ١٤١٥,٥ جنيه

إيجاد أصل القرض

يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التى تم تطبيقها عند حساب قيمة القسط المتساوى مع مراعاة أن المجهول فى هذه الحالة سيكون أصل القرض (أ) ويتم الحصول عليه بمعلومية القسط (ط).

مثال

اقترض شخص مبلغ من المال وتعهد بسداده على أقساط سدس سنوية تدفع فى نهاية كل شهرين لمدة سنة كاملة ، فإذا كانت قيمة القسط الواحد ٨٦١٧٩ جنيه ، فما هو أصل مبلغ الائتمان الممنوح للمستثمر إذا كان معدل الفائدة البسيطة ٦%

الحل

<u>بيانات القرض :</u>

أ = ؟ ، ن = ١ سنة ، ع = ٦ %

<u>جملة القرض :</u>

جملة القرض = أ × (١+ع ن)

$$= أ \times (١ + \frac{٦}{١٠٠} \times ١)$$

$$= \boxed{١,٠٦ أ}$$

<u>بيانات الأقساط :</u>

المدة كلها بالشهور = سنة (١٢ شهر) ، س = ٨٦١٧٩ ج ،
مدة القسط الواحد = سدس سنوي (كل شهرين) ، ع = ٦ %

$$\text{عدد الأقساط (د)} = \frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ أقساط}$$

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_1$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ٢ = ١٠ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

تطبيق قانون جملة الأقساط

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_1 + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٨٦١٧٩ \times ٦ + ٨٦١٧٩ \times \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٦}{٢} \times \frac{\left(١٠ + صفر\right)}{١٢}$$

= ٥٣٠٠٠٠,٨٥ جنيه

تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

جملة القرض = جملة الأقساط

١,٠٦ أ = ٥٣٠٠٠٠,٨٥

∴ أ = ٥٠٠٠٠٠ جنيه

مثال

اقترضت مؤسسة من أحد البنوك مبلغاً معيناً بمعدل فائدة ٢٠٪ وكان الاتفاق على أن يتم سداد القرض على أقساط شهرية متساوية من قيمة القرض وفوائده لمدة سنة قيمة كل منها ٢٠٠٠ جنيه وبعد سداد ٣ أقساط مباشرة توافرت السيولة النقدية لدى المؤسسة فأرادت دفع المتبقي من القرض دفعة واحدة ، احسب المبلغ الذي ستدفعه المؤسسة ؟

الحل

بيانات القرض الجديد (أ) :

أ = ؟ ، ع = ٢٠٪ ، ط = ٢٠٠٠ جنيه

مدة القسط الواحد = شهر

∵ المدة كلها = سنة = ١٢ شهر، وبعد سداد ٣ أقساط توافرت السيولة

∴ مدة القرض المتبقية = ١٢ - ٣ = ٩ شهور

جملة القرض الجديد = أ (١ + ع × مدة القرض المتبقية)

$$= أ\left(١ + \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢}\right)$$

$$= \boxed{١,١٥ \ أ}$$

بيانات الأقساط الباقية :

عدد الأقساط الباقية (د) = ٩ أقساط

مدة أول قسط باقى ($ن_١$) = ٩ - ١ = ٨ شهور

مدة أخر قسط باقى ($ن_ر$) = صفر (دائماً)

تطبيق قانون جملة الأقساط الباقية:

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٢٠٠٠ \times ٩ + ٢٠٠٠ \times \frac{٢٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{٢} \times \frac{\left(٨ + صفر\right)}{١٢}$$

$$= ١٨٠٠٠ + ١٢٠٠ = \boxed{١٩٢٠٠} \text{ جنيه}$$

تطبيق المعادلة التالية

جملة القرض = جملة الأقساط

جملة القرض = جملة الأقساط

۱,۱٥ أ = ١٩٢٠٠

∴ أ = $\boxed{١٦٦٩٥,٦٥}$ جنيه

إيجاد معدل فائدة القرض

يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التى تم تطبيقها عند حساب قيمة القسط المتساوى مع مراعاة أن المجهول فى هذه الحالة سيكونمعدل الفائدة (ع) ويتم الحصول عليه بمعلومية القسط (ط).

مثال

مستثمر مدين بمبلغ ٦٠٠ جنيه فإذا اتفق مع الدائنين على سداد الائتمان بأقساط شهرية لمدة سنة كاملة قيمة القسط الواحد ٥١.٥٨٢ جنيه ، فما هو معدل الفائدة السنوي المستخدم ؟

الحل

<u>بيانات القرض :</u>

أ = ٦٠٠ ، ن = ١ سنة ، ع = ؟

<u>إيجاد جملة القرض :</u>

جـ = أ (١ + ع ن)

جـ = ٦٠٠ (١ + ع × ١)

∴ جملة القرض = $\boxed{٦٠٠ + ٦٠٠ ع}$

<u>بيانات الأقساط :</u>

المدة كلها بالشهور = سنة (١٢ شهر)

مدة القسط الواحد = شهر س = ٥١,٥٨٢ جنيه

$$\text{عدد الأقساط (د)} = \frac{\text{مدة الأقساط بالشهور}}{\text{مدة القسط الواحد بالشهور}} = \frac{١٢}{١} = ١٢ \text{ أقساط}$$

حساب مدة القسط الأول بالشهور ($ن_١$)

= المدة كلها بالشهور - مدة القسط الواحد بالشهور

= ١٢ - ١ = ١١ شهور

حساب مدة القسط الأخير بالشهور ($ن_ل$) = صفر

<u>تطبيق قانون جملة الأقساط</u>

$$= ط \times د + ط \times ع \times \frac{د}{٢} \times \frac{\left(ن_١ + ن_ل\right)}{١٢}$$

$$= ٥١,٥٨٢ \times ١٢ + ٥١,٥٨٢ \times ع \times \frac{١٢}{٢} \times \frac{\left(١١ + \text{صفر}\right)}{١٢}$$

$$= \boxed{٦١٨,٩٨٤ + ٢٨٣,٧٠١ \text{ ع}} \text{ جنيه}$$

<u>تطبيق القاعدة :</u>

جملة القرض = جملة الأقساط

٦٠٠ + ٦٠٠ ع = ٦١٨,٩٨٤ + ٢٨٣,٧٠١ ع

٦٠٠ ع - ٢٨٣,٧٠١ ع = ٦١٨,٩٨٤ - ٦٠٠

٣١٦,٢٩٩ ع = ١٨,٩٨٤

$$ع = \frac{١٨,٩٨٤}{٣١٦,٢٩٩}$$

= ٠,٠٦

تمارين استهلاك القروض

(١) إقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه من البنك الأهلى وتعهد بسداد هذا المبلغ وفوائده بدفع ٤ أقسا ط ربع سنوية متساوية تدفع فى آخر كل ٣شهور، والمطلوب حساب قيمة القسط إذا كان معدل الفائدة البسيطة ١٢ % سنوياً.

(٢) اقترض مصنع مبلغ ٢٠٠٠٠ ج من بنك الاسكندرية وتعهد بسداد هذا المبلغ على ٣ أقساط ثلث سنوية متساوية تدفع القسط فى آخر كل ٤شهور . أوجد قيمة القسط علماً بأن معدل الفائدة ٧%.

(٣) اشترى مستورد بضاعة من أحد الموردين بمبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه واتفق مع المورد على سداد قيمة البضاعة بأقساط شهرية متساوية من الاصل والفوائد معا خلال عام . فإذا علمت أن معدل الفائدة البسيطة المستخدم ٥ % سنويا. أحسب قيمة القسط الشهرى ومجموع الفوائد التى تحملها المدين .

(٤) اقترض شخص من بنك مصر ٤٠٠٠٠ جنيه لمدة ثمانية شهور واتفق على سداده على أقساط شهرية متساوية طوال مدة القرض ، على أن يبدأ سداد أول قسط فى نهاية شهر من بداية مدة القرض ، فإذا بلغت قيمة هذا القسط ٥٠٠٠ حنيه شهرياً . فاوجد معدل الفائدة البسيطة الذى يستخدمه البنك فى حساباته، إذا كانت الفائدة المحسوبة فائدة بسيطة .

(٥) اشترى شخص مشاية كهربائية ثمنها الفورى ٤٥٠٠ ج، دفع ثلث الثمن عند الشراء وتمالإتفاق على سداد الباقى على أقساط شهرية تدفع فى أخر كل شهرلمدة سنة فإذا كان مقدار القسط ٩٠ ج أوجد معدل الفائدة المستخدم فى هذه العملية.

(٦) اقترض عباس مبلغ ٧٠٠٠ جنيه من أحد البنوك لمدة سنة واتفق مع البنك على سداد هذا المبلغ وفوائده بأقساط شهرية متساوية بدفع

القسط آخر كل شهر ، فإذا علمت أن القسط الشهرى بلغ ٣٠٠ جنيه .
احسب معدل الفائدة المستخدم فى البنك .

(٧) اقترض تاجر من أحد البنوك التجارية مبلغ ٤٠٠٠٠ جنيه لمدة ٦ شهور وذلك على أساس فائدة بسيطة بمعدل ٦ % سنوياً. على أن يقوم بسداد هذا القرض وفوائده على صورة أقساط شهري متساوى على أن يدفع أول قسط فى نهاية الشهر الأول من تاريخ القرض، ويستمر السداد حتى نهاية مدة القرض، فاحسب قيمة القسط اللازم لسداد هذا القرض ، وصور جدول استهلاك هذا القرض .

(٨) إقترض مبلغ ٤٠٠٠٠ جنيه من أحد البنوك وتعهد بسداد هذا المبلغ وفوائده بدفع ١٢ قسطاً شهرياً متساوياً تدفع فى آخر كل شهر، والمطلوب حساب قيمة القسط المتساوى إذا كان معدل الفائدة البسيطة ٨ % سنوياً.

(٩) إقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ج من بنك مصر وتعهد بسداد هذا المبلغ على ١٢ قسطاً شهرياً متساوياً يدفع القسط في آخر كل شهر، أوجد قيمة القسط الشهري علماً بأن معدل الفائدة ٦ %.

(١٠) اشترى تاجر بضاعة من أحد الموردين بمبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه وإتفق مع المورد على سداد قيمة البضاعه بأقساط شهرية متساوية من الأصل والفوائد معا خلال عام، فإذا عملت أن معدل الفائدة البسيطة المستخدم ١٢% سنويا. أحسب قيمة القسط الشهرى ومجموع الفوائد التى تحملها التاجر .

(١١) اقترضت شركة من البنك التجارى الدولى ٢٠٠٠٠ جنيه لمدة ثمانية شهور واتفقت على سداد القرض على أقساط شهرية متساوية طوال مدة القرض، على أن يبدأ سداد أول قسط فى نهاية شهر من بداية مدة القرض ، فإذا بلغت قيمة هذا القسط ٢٥٥٥.٢٨٣ جنيه شهرياً. فأوجد معدل البسيطة المستخدم ؟

الفصل الخامس

تسوية الديون قصيرة الأجل بفائدة بسيطة

مقدمة

تسوية الديون تعنى تعديل طريقة سدادها بحيث يشمل هذا التعديل قيمة الديون أو تاريخ استحقاقها أوقيمتها وتاريخ الاستحقاق معا. فالتسوية تعنى استبدال ديون قديمة بديون أخري جديدة قد تكون بقيم أخرى جديدة، أو تورايخ استحقاق جديدة، أو الاثنين معاً.

فكثيراً ما يصادف الدائنين أو المدينين نقص فى السيولة اللازمة للقيام بأعمالهم، فقد يحتاج الدائن إلى سيولة فيطلب من المدين أن يسدد له جزءاً أو كل ما عليه أو تعديل أسلوب السداد بدفع مبلغ فى الحال ثم إعادة جدولة الديون الباقية، وذلك أيضا بحيث لا يضار أحدٌ منهما من هذا التعديل.

وتجدر الإشارة إلى أن هناك ظروف متعددة، قد تجبر المدين على أن يطلب من الدائن الموافقة على تأجيل تواريخ الاستحقاق لمبالغ الديون المختلفة، وذلك خشية توقفه عن الدفع فى تواريخ الاستحقاق المتفق عليها، وما يتبع ذلك من مشكلات قانونية وغيرها.

ومن ناحية أخرى فقد يطلب الدائن من المدين تقديم تاريخ أو تواريخ الاستحقاق لدين أو لعدة ديون عن مواعيد استحقاقها الأصلية وذلك لتوفير السيولة اللازمة له لشدة حاجته لمثل هذه السيولة لتسيير أعماله.

فقد يتفق المدين بدين ما يستحق فى تاريخ استحقاق معين، قد يتفق مع الدائن على تعديل قيمة هذا الدين أو موعد استحقاقه. والقاعدة الأساسية التى تحكم عملية التسوية هى "أن تأجيل الديون إلى تاريخ لاحق لتاريخ استحقاقها سوف يؤدى إلى زيادة قيمتها بمقدار الفائدة المستحقة عن هذا التأجيل، وإذا تم تعديل تاريخ السداد إلى موعد سابق لتاريخ الاستحقاق فهذا يجعل قيمة الدين المسدد أقل من قيمته الأصلية".

أن الأساس الهام فى عملية التعديل أو التسوية هو ضرورة تساوى قيمة الديون القديمة (قبل التسوية) مع قيمة الديون الجديدة (بعد التسوية) وذلك حتى لايضار المدين أو الدائن نتيجة ذلك التعديل. وهذا التساوى قد يكون بين جملتين أو قيمتين حاليتين تبعاً لتاريخ التسوية المختار.

والأساس الثانى الذى تقوم عليه عملية التسوية هو إختيار تاريخ للتسوية يتم عنده حساب قيمة الديون القديمة، ويتم عنده أيضاً حساب قيم الديون الجديدة ويلعب هذا التاريخ دوراً هاماً فى تحديد قيمة الديون سواء أكانت ديون قديمة أو جديدة.

ويقابلنا عند إجراء التسوية أحد الثلاث إحتمالات التالية:

الأول: أن يقع تاريخ استحقاق الدين **قبل** تاريخ التسوية، سواء أكان هذا الدين قديم أو جديد، ومن البديهى فى هذه الحالة أن **تزيد** قيمة هذا الدين بمقدار الفائدة المستحقة عن المدة المحصورة بين تاريخ الدين وتاريخ التسوية، بمعنى أننا سوف نحسب جملة هذا الدين للوقوف على قيمته العادلة فى تاريخ التسوية.

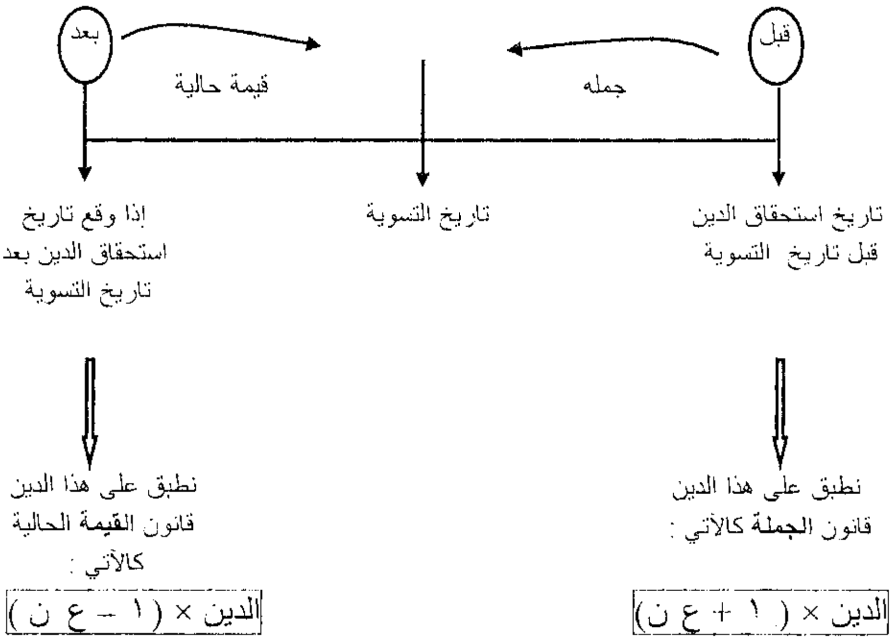
الثانى: أن يقع تاريخ استحقاق الدين **بعد** تاريخ التسوية، سواء أكان هذا الدين قديم أو جديد، ومن البديهى فى هذه الحالة أن **تقل** قيمة هذا الدين بمقدار الفائدة المستحقة عن المدة المحصورة بين تاريخ الدين وتاريخ التسوية، بمعنى أننا سوف نحسب القيمة الحالية لهذا الدين للوقوف على قيمته العادلة فى تاريخ التسوية.

الثالث: أن يكون تاريخ استحقاق الدين **هو نفس** تاريخ التسوية، سواء أكان هذا الدين قديم أو جديد، ومن البديهى فى هذه الحالة أن تظل قيمة هذا الدين **كما هى** ، بمعنى أننا سوف نترك هذا الدين بنفس قيمته الأسمية فهى قيمته العادلة فى تاريخ التسوية.

وحتى لايضار أى طرف من أطراف التعاقد، المدين أو الدائن، من إحداث التعديلات المشار إليها عاليه ، يجب أن تتعادل مجموع قيم الديون الأصلية (القديمة) مع مقادير الديون المعدلة (الجديدة) فى تاريخ محدد وهوتاريخ استبدال أوتسوية الديون. وبناء على ماتقدم فإن عملية التسوية تعتمد على المقارنة بين كل من :

أ- تاريخ استحقاق كل دين على حده .
ب- تاريخ التسوية.

ويوضح الشكل التالى طبيعة القوانين المستخدمة وفقاً لأسس التسوية السابق ذكرها:



وتتوقف التسوية أيضاً على المعدل المستخدم فى إجراء التسوية، فإذا كان معدل الفائدة = معدل الخصم ففي هذه الحالة يتم اختيار أى تاريخ لإجراء التسوية سواء أكان لاحقاً أم سابقاً لتواريخ الاستحقاق للديون القديمة. و قد يتعلق الاتفاق بتعديل كل من قيمة الديون وتواريخ استحقاقها فى وقت واحد.

ومما سبق يتضح أنه يمكن تسوية الديون باستخدام كل من معادلة الفائدة أو معادلة الخصم أو المعادلتين معاً، من خلال فكرة معادلة القيمة فى تسوية الديون، والفكرة الأساسية التى تقوم عليها هذه المعادلة، أنه حتى لا يضار كل من المدين أو الدائن من عملية استبدال وتسوية الديون، فيجب

أن تتساوى قيمة الديون الأصلية (قبل التسوية) مع قيمة الديون الجديدة (بعد التسوية) في لحظة محددة.

ويأخذ استبدال الديون أكثر من صورة نذكر منها:

١- استبدال الدين الأصلى بدين آخرجديد لمدة أطول أو (أقصر) من الدين الأصلى، أى تغيير تواريخ الاستحقاق.

٢- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بدين واحد يستحق بعد مواعيد استحقاق الديون الأصلية.

٣ - استبدال مجموعة من الديون الأصلية بدين واحد يستحق قبل موعد استحقاق الديون الأصلية.

٤- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بدين واحد يستحق قبل مواعيد استحقاق الديون الأصلية. وبعد موعد استحقاق البعض الآخر.

٥- سداد جزء من الدين الأصلى نقداً، على أن يحرر بالباقى ورقة أو عدة أوراق تجارية، تستحق فى تواريخ جديدة بما تسمح للمدين بالوفاء بقيم هذه الأوراق فى تواريخها الجديدة .

ويتم الاتفاق بين المدين أو الدائن على تاريخ تسوية الديون ويختلف شكل التسوية باختلاف التاريخ المتفق عليه للتسوية، وتبعاً لذلك تأخذ التسوية أحد الأشكال التالية:

<u>الشكل الأول</u>: أن تتم التسوية حالاً (أى فى تاريخ طلب استبدال الديون)، وهذه هى الصورة الشائعة عند تسوية الديون ويكون شكل معادلة القيمة فى هذه الحالة كالتالى:

قيمة الديون القديمة (قبل التسوية) = قيمة الديون الجديدة (بعد التسوية)

<u>الشكل الثانى</u>:

أن تتم التسوية فى تاريخ استحقاق مشترك، فقد يتم اختيار تاريخ التسوية بحيث يتخلل تواريخ استحقاق الديون الأصلية.

مثال

تاجر مدين بالمبالغ الآتية:

٣٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٩٠ يوماً.

٥٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ١٢٠ يوماً.

٦٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ١٥٠ يوماً.

أراد هذا التاجر استبدال الديون الثلاثة الأصلية، بدينين جديدين متساويين يستحق أولهما بعد ٦٠ يوماً، والأخر بعد ١٨٠ يوماً، فإذا كان معدل الخصم هو ٦% سنوياً. احسب قيمة كل من الدينين الجديدين.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٣٠٠٠ ←	بعد ٩٠ يوم	س ←	بعد ٦٠ يوم
٥٠٠٠ ←	بعد ١٢٠ يوم	س ←	بعد ١٨٠ يوم
٦٠٠٠ ←	بعد ١٥٠ يوم		

ع = ٦%

<u>١ ـ تاريخ الاتفاق الآن</u>

<u>٢ ـ القيمة الحالية للديون القديمة</u>

$$= ٣٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٣٦٠})$$

$$+ ٥٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٢٠}{٣٦٠})$$

$$+ ٦٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٥٠}{٣٦٠})$$

$= ٢٩٥٥ + ٤٩٠٠ + ٥٨٥٠$

$=$ ١٣٧٠٥جنيه

٣ ـ القيمة الحالية للديون الجديدة

$$= س \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٦٠}{٣٦٠})$$

$$+ س \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{١٨٠}{٣٦٠})$$

$= ٠,٩٩$ س $+ ٠,٩٧$ س

$= ١,٩٦$ س

٤ ـ معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

$١٣٧٠٥ = ١,٩٦$ س

$$س = \frac{١٣٧٠٥}{١,٩٦} = ٦٩٩٢,٣٥ \text{ جنيه}$$

∴ القيمة الاسمية لكل دين هي ٦٩٩٢,٣٥ جنيه

مثال

شركة مدينة بالمبالغ الآتية :

٥٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٣ شهور.

٦٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٦ شهور.

٧٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٩ شهور.

فإذا أرادت استبدال هذه الديون بثلاثة ديون أخرى لكل منها نفس القيمة الإسمية وتستحق بعد ٤ شهور، ٨ شهور، ١٠ شهور على الترتيب. فما هى القيمة الإسمية لكل منها إذا كان المعدل ١٢%سنوياً.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٥٠٠٠	بعد ٣ شهور	س	بعد ٤ شهور
٦٠٠٠	بعد ٦ شهور	س	بعد ٨ شهور
٧٠٠٠	بعد ٩ شهور	س	بعد ١٠ شهور

ع = ١٢ %

١- تاريخ الاتفاق الآن

٢- القيمة الحالية للديون القديمة

$$= ٥٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢})$$

$$+ ٦٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢})$$

$$+ ٧٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢})$$

$$= ٤٨٥٠ + ٥٦٤٠ + ٦٣٧٠$$

= ١٦٨٦٠جنيه

٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة

$$= س \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٤}{١٢})$$

$$+ \text{س} \times \left(١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٨}{١٢}\right)$$

$$+ \text{س} \times \left(١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٢}\right)$$

= ٠,٩٦ س + ٠,٩٢ س + ٠,٩٠ س

= ٢,٧٨ س

٤ - معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

١٦٨٦٠ = ٢,٧٨ س

$$\text{س} = \frac{١٦٨٦٠}{٢,٧٨} = ٦٠٦٤,٧٥ \text{ جنيه}$$

∴ القيمة الاسمية لكل دين هي ٦٠٦٤,٧٥ جنيه

مثال

شخص مدين لأحد البنوك بمبلغ ٣٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد شهرين فإذا دفع الآن مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه واتفق مع البنك على أن يحرر له كمبيالتين بالباقى لهما نفس القيمة الإسمية تستحق الأولى بعد ٣ شهور وتستحق الثانية بعد ٦شهور والمطلوب معرفة القيمة الإسمية لكل من هاتين الكمبيالتين إذا كان المعدل فى هذا البنك ٩ % سنوياً.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٣٠٠٠٠	← بعد شهرين	١٠٠٠٠	← نقداً
		س	← بعد ٣ شهور
		س	← بعد ٦ شهور

ع = ٩ %

١- تاريخ الاتفاق الآن

٢- القيمة الحالية للديون القديمة

= ٣٠٠٠٠ × (١ - ٩/١٠٠ × ٢/١٢) = ٢٩٥٥٠ جنيه

٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة

= س × (١ - ٩/١٠٠ × ٣/١٢) + س × (١ - ٩/١٠٠ × ٦/١٢) + ١٠٠٠٠

= ٠,٩٧٧٥ س + ٠,٩٥٥ س + ١٠٠٠٠

= ١,٩٣٢٥ س + ١٠٠٠٠

٤- معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة + المبلغ النقدي

٢٩٥٥٠ = ١,٩٣٢٥ س + ١٠٠٠٠

٢٩٥٥٠ - ١٠٠٠٠ = ١,٩٣٢٥ س

١٩٥٥٠ = ١,٩٣٢٥ س

س = ١٩٥٥٠ / ١,٩٣٢٥ = ١٠١١٦,٤٣ جنيه

∴ القيمة الاسمية لكل دين هي ١٠١١٦,٤٣ جنيه

مثال

شركة مدينة لأحد البنوك بالمبالغ الآتية:

٥٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور من الآن

٦٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور من الآن

فإذا إتفقت الشركة مع بنك مصر على سداد ٣٠٠٠٠ جنيه فوراً وسداد الباقي بسندين القيمة الأسمية للأول ضعف القيمة الأسمية للثانى ويستحقا بعد ٩ شهور، ١٢ شهراً على التوالى من الآن. والمطلوب حساب القيمة الأسمية لكل من السندين اذا كان معدل الفائدة المستخدم ١٥% سنوياً.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٥٠٠٠٠ ⟵	بعد ٣ شهور	٣٠٠٠٠	فوراً (الآن)
٦٠٠٠٠ ⟵	بعد ٦ شهور	٢ س	⟵ بعد ٩ شهور
		س	⟵ بعد ١٢ شهر

ع = ١٥ %

<u>١ - تاريخ الاتفاق الآن</u>

<u>٢ - القيمة الحالية للديون القديمة</u>

$$= ٥٠٠٠٠ \times (١ - \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢})$$

$$+ ٦٠٠٠٠ \times (١ - \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢})$$

$$= ٤٨١٢٥ + ٥٥٥٠٠$$

= ١٠٣٦٢٥ جنيه

٣ ـ القيمة الحالية للديون الجديدة

$$= \text{س} \times (1 - \frac{15}{100} \times \frac{9}{12}) + 2\text{ س} \times (1 - \frac{15}{100} \times \frac{12}{12}) + 30000$$

= ٠,٨٨٧٥ س + ١,٧ س + ٣٠٠٠٠

= ٢,٥٨٧٥ س + ٣٠٠٠٠

٤ ـ معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

١٠٣٦٢٥ = ٢,٥٨٧٥ س + ٣٠٠٠٠

١٠٣٦٢٥ ـ ٣٠٠٠٠ = ٢,٥٨٧٥ س

٧٣٦٢٥ = ٢,٥٨٧٥ س

$$\text{س} = \frac{73625}{2{,}5875}$$

= ٢٨٤٥٤,١ جنيه

∴ القيمة الاسمية للسند الأول = ٢ س

= ٢ × ٢٨٤٥٤,١

= ٥٦٩٠٨,٢ج

∴ القيمة الاسمية للسند الثانى = س = ٢٨٤٥٤,١ ج

مثال

شركة مدينة لبنك مصر بالمبالغ الآتية:

١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٥ شهور من الآن

٢٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٧ شهور من الآن

٣٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٩ شهور من الآن

فإذا أرادت الشركة سداد ديونها مرة واحدة بعد سنة، المطلوب حساب المبلغ الواجب السداد بعد سنة سداد لديونها لدى بنك مصر مرة واحدة باستخدام معدل خصم ١٢% سنوياً.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة
١٠٠٠٠ ← بعد ٥ شهور		س ← بعد سنة = ١٢ شهر
٢٠٠٠٠ ← بعد ٧ شهور		
٣٠٠٠٠ ← بعد ٩ شهور		

ع = ١٢ %

<u>١ـ تاريخ الاتفاق الآن</u>

<u>٢ـ القيمة الحالية للديون القديمة</u>

$$= ١٠٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٥}{١٢})$$

$$+ ٢٠٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٧}{١٢})$$

$$+ ٣٠٠٠٠ \times (١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢})$$

$$= ٩٥٠٠ + ١٨٦٠٠ + ٢٧٣٠٠$$

= ٥٥٤٠٠ جنيه

٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة

$$= س \times \left(١ - \frac{١٢}{١٠٠} \times ١\right)$$

= ٠,٨٨ س

٤ - معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

٥٥٤٠٠ = ٠,٨٨ س

$$س = \frac{٥٥٤٠٠}{٠,٨٨}$$

= ٦٢٩٥٤,٥ جنيه

∴ المبلغ الواجب سداده بعد سنة هو ٦٢٩٥٤,٥ جنيه

مثال

شركة مدينة بالديون الآتية:

٢٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور

٣٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور

٥٠٠٠ جنيه تستحق بعد ١٠ شهرا

فإذا أرادت استبدال هذه الديون بثلاثة ديون متساوية القيمة الأسمية بحيث يستحق الأول بعد ٤ شهور والثانى بعد ٧ شهور والثالث بعد ٩ شهور علماً بأن معدل الخصم هو ٩ % سنوياً.

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٢٠٠٠	← بعد ٣ شهور	س	← بعد ٤ شهور
٣٠٠٠	← بعد ٦ شهور	س	← بعد ٧ شهور
٥٠٠٠	← بعد ١٠ شهور	س	← بعد ٩ شهور

ع = ٩ %

<u>١- تاريخ الاتفاق الآن</u>

<u>٢- القيمة الحالية للديون القديمة</u>

$$= ٢٠٠٠ \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}\right)$$

$$+ ٣٠٠٠ \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢}\right)$$

$$+ ٥٠٠٠ \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٢}\right)$$

$$= ١٩٥٥ + ٢٨٦٥ + ٤٦٢٥$$

= ٩٤٤٥جنيه

<u>٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة</u>

$$= \text{س} \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٤}{١٢}\right)$$

$$+ \text{س} \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٧}{١٢}\right)$$

$$+ \text{س} \times \left(١ - \frac{٩}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢}\right)$$

= ٠,٩٧ س + ٠,٩٤٧٥ س + ٠,٩٣٢٥ س

= ٢,٨٥ س

٤ - معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

$$٩٤٤٥ = ٢,٨٥ \text{ س}$$

$$\text{س} = \frac{٩٤٤٥}{٢,٨٥} = ٣٣١٤,٠٤ \text{ جنيه}$$

∴ القيمة الاسمية لكل دين هي ٣٣١٤,٠٤ جنيه

مثال

مؤسسة مدينة بالمبالغ الآتية : ١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور، ٢٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور، ٣٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ١٠ شهور، فإذا أرادت استبدال هذه الديون الثلاثة بدينين لهما نفس القيمة الإسمية يستحق الأول بعد ٨ شهور والثانى بعد سنة فما قيمة كل منهما إذا كان المعدل ٨ % سنوياً.

الحل

ديون قديمة			ديون جديدة	
١٠٠٠٠ ←	بعد ٣ شهور	س	←	بعد ٨ شهور
٢٠٠٠٠ ←	بعد ٦ شهور	س	←	بعد سنة
٣٠٠٠٠ ←	بعد ١٠ شهور			

ع = ٨ %

١- تاريخ الاتفاق الآن

٢- القيمة الحالية للديون القديمة

$$= ١٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢})$$

$$+ ٢٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢})$$

$$+ \ ٣٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٢})$$

$$= ٩٨٠٠ + ١٩٢٠٠ + ٢٨٠٠٠$$

= ٥٧٠٠٠ جنيه

<u>٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة</u>

$$= س \times (١ - \frac{٨}{١٠٠} \times \frac{٨}{١٢})$$

$$+ \ س \times (١ - \frac{٨}{١٠٠} \times ١)$$

= ٠,٩٤٦٧ س + ٠,٩٢ س

= ١,٨٦٧ س

<u>٤ - معادلة القيمة</u>

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

٥٧٠٠٠ = ١,٨٦٧ س

$$س = \frac{٥٧٠٠٠}{١,٨٦٧}$$

= ٣٠٥٣٠,٣ جنيه

∴ القيمة الاسمية لكل دين هي ٣٠٥٣٠,٣ جنيه

مثال

شخص مدين بمبلغين ٤٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور ، ٨٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور، دفع مبلغ فوري ٢٢٥٠٠ جنيه والباقي بعد ٩ شهور، فما هو هذا المبلغ الواجب دفعة إذا كان معدل الخصم ١٠٪

الحل

نفرض أن المبلغ الواجب دفعه هو ← س

١ـ <u>تحديد تاريخ التسوية</u>

يفترض الآن لأنه لم يحدد تاريخ التسوية.

٢ـ <u>القيمة الحالية للديون القديمة</u>

$$= ٤٠٠٠٠ \times \left(١ - \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}\right)$$

$$+ ٨٠٠٠٠ \times \left(١ - \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٦}{١٢}\right)$$

= ٣٩٠٠٠ + ٧٦٠٠٠

= ١١٥٠٠٠

٣ ـ <u>القيمة الحالية للديون الجديدة</u>

$$= س \times \left(١ - \frac{١٠}{١٠٠} \times \frac{٩}{١٢}\right) + ٢٢٥٠٠$$

= ٠,٩٢٥ س + ٢٢٥٠٠

٤ـ <u>معادلة القيمة</u>

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة + المبلغ النقدي

١١٥٠٠٠ = ٠,٩٢٥ س + ٢٢٥٠٠

١١٥٠٠٠ ـ ٢٢٥٠٠ = ٠,٩٢٥ س

٩٢٥٠٠ = ٠,٩٢٥ س

$$س = \frac{٩٢٥٠٠}{٠,٩٢٥} = ١٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

∴ المبلغ الواجب دفعه بعد ٩ شهور = ١٠٠٠٠٠ جنيه

مثال

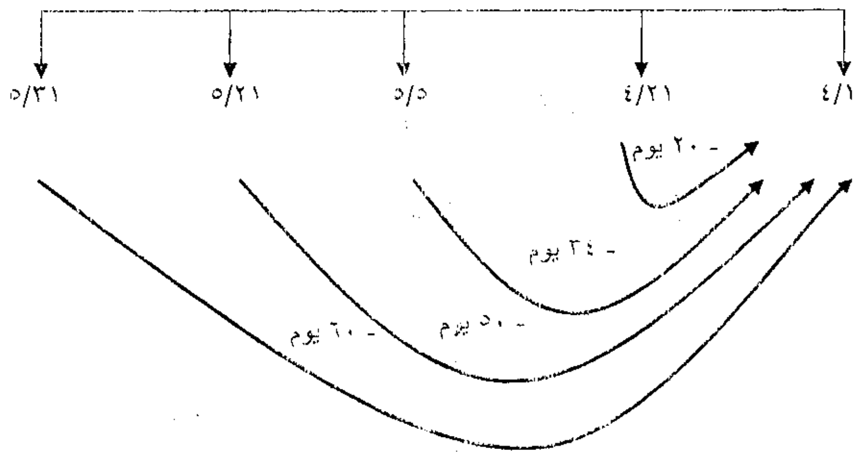
مستثمر مدين لممول بكمبيالة قيمتها الاسمية ٢٦٠٠٠٠ جنيه تستحق في ٢٠١٥/٥/٥ وقد اتفق مع الممول في ١/٤ من نفس العام على إعادة جدولة هذا الائتمان باستبداله بثلاث كمبيالات جديدة الأولى قيمتها الاسمية ١٣٠٠٠٠ جنيه وتستحق في ٢٠١٥/٤/٢١ ، والثانية قيمتها الاسمية ٧٠٠٠٠ جنيه وتستحق في ٢٠١٥/٥/٢١ ، فما هي القيمة الاسمية للكمبيالة الثالثة إذا كانت تستحق في ٢٠١٥/٥/٣١ إذا كان معدل الخصم التجاري ٦ ٪

الحل

ديون قديمة		ديون جديدة	
٢٦٠١٠٠ ←	١٥/٥/٥	١٣٠٠٠٠ ←	١٥/٤/٢١
		٧٠٠٠٠ ←	١٥/٥/٢١
		س ←	١٥/٥/٣١

ع = ٦%

تاريخ التسوية



يلاحظ وجود معدل خصم (ع = ٦ ٪)

١- تاريخ الاتفاق ١ / ٤ / ٢٠١٥

٢- القيمة الحالية للديون القديمة = $٢٦٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٣٤}{٣٦٠})$

= ٢٥٨٥٢٦,٦٧ جنيه

٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة

$= ١٣٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٢٠}{٣٦٠})$

$+ ٧٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٥٠}{٣٦٠})$

$+$ س $\times (١ - \frac{٦}{١٠٠} \times \frac{٦٠}{٣٦٠})$

= ١٢٩٥٦٦,٦٧ + ٦٩٤١٦,٦٧ + ٠,٩٩ س

٤ - معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

٢٥٨٥٢٦,٦٧ = ١٢٩٥٦٦,٦٧ + ٦٩٤١٦,٦٧ + ٠,٩٩ س

٢٥٨٥٢٦,٦٧ - ١٢٩٥٦٦,٦٧ - ٦٩٤١٦,٦٧ = ٠,٩٩ س

٥٩٥٤٣,٣٣ = ٠,٩٩ س

س = $\frac{٥٩٥٤٣,٣٣}{٠,٩٩}$

= ٦٠١٤٤,٧٨ جنيه

∴ القيمة الاسمية للكمبيالة الثالثة هي ٦٠١٤٤,٧٨ جنيه

مثال

شخص مدين بالمبالغ الآتية :

١٢٠٠٠٠ تستحق السداد في ٢٠١٤/٣/١١
٤٠٠٠٠ تستحق السداد في ٢٠١٤/٣/٢١

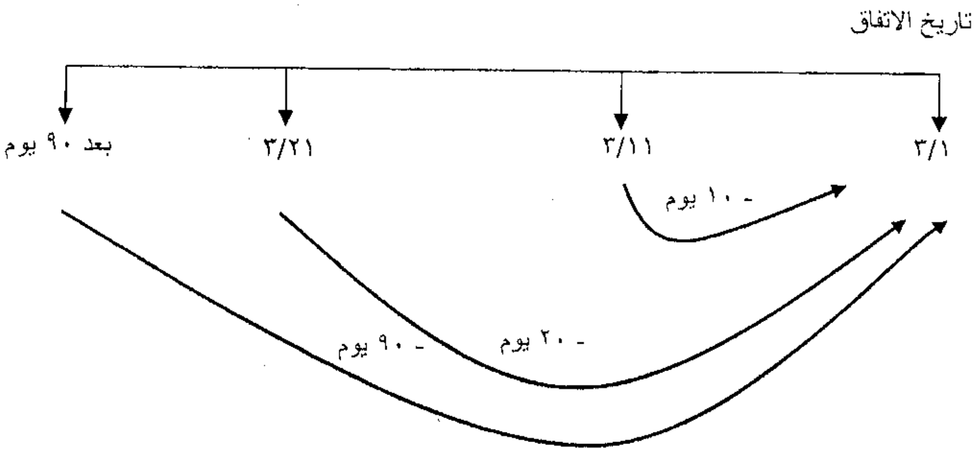
وقد اتفق مع الدائن في أول مارس من نفس العام على سداد هذه الالتزامات بكمبيالة جديدة (أنتمان جديد) تستحق بعد ٩٠ يوم فإذا علمنا أن معدل الخصم التجاري ٤,٥ ٪ ، فما هي القيمة الاسمية للائتمان الجديد

الحل

الديون القديمة		الديون الجديدة	
١٢٠٠٠٠ ←	٣/١٠	س	← ٩٠ يوم
٤٠٠٠٠ ←	٣/٢١		

ع = ٤,٥ ٪

<u>١- تاريخ الاتفاق ٢٠١٤/٣/١</u>



٢ - القيمة الحالية للديون القديمة

$$= ١٢٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{١٠}{٣٦٠})$$

$$+ ٤٠٠٠٠ \times (١ - \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{٢٠}{٣٦٠})$$

$$= ١١٩٨٥٠ + ٣٩٩٠٠$$

$$= ١٥٩٧٥٠$$

٣ - القيمة الحالية للديون الجديدة

$$= س \times (١ - \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{٩٠}{٣٦٠})$$

$$= ٠,٩٨٨٧٥ \text{ س}$$

٤ - معادلة القيمة

ق . ح للديون القديمة = ق . ح الديون الجديدة

$$١٥٩٧٥٠ = ٠,٩٨٨٧٥ \text{ س}$$

$$س = \frac{١٥٩٧٥٠}{٠,٩٨٨٧٥}$$

$$= ١٦١٥٦٧,٦٣ \text{ جنيه}$$

∴ القيمة الاسمية للكمبيالة الثالثة هي ١٦١٥٦٧,٦٣ جنيه

مثال

مستثمر مدين بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة بسيطة ٥٪ ويستحق المبلغ بعد سنة من الآن فإذا اتفق المستثمر على الآتي :

١ ـ دفع مبلغ ٦٠٠٠ جنيه بعد ٥ شهور

٢ ـ دفع مبلغ ٨٠٠٠ جنيه بعد ٩ شهور

فأوجد الرصيد الواجب سداده بواسطة المستثمر في تاريخ استحقاق الائتمان (الدين) الأصلي ؟

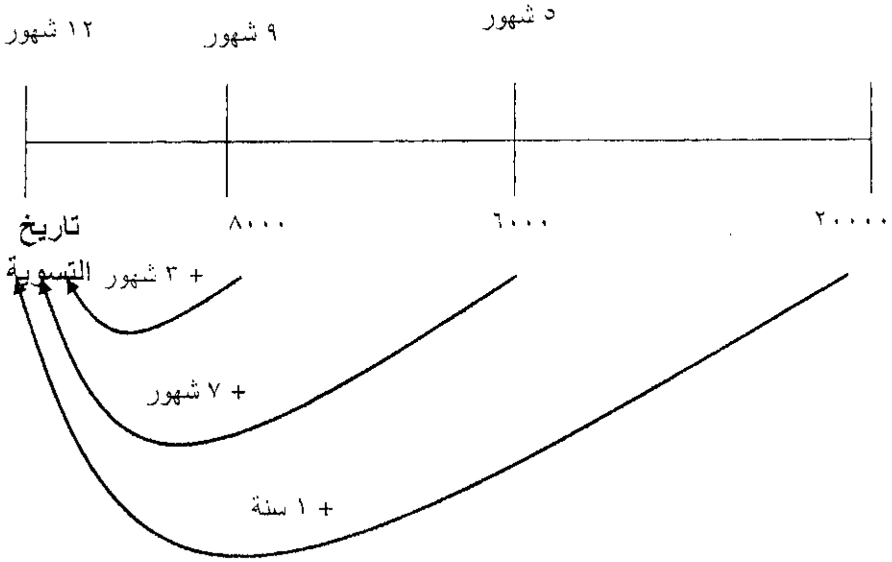
الحل

أصلي		تسديدات	
٢٠٠٠٠	← ١ سنة	٦٠٠٠	← ٥ شهور
		٨٠٠٠	← ٩ شهور
		س	← ؟؟

ع = ٥ ٪

المعطي هو معدل فائدة

الخطوات :



١ - بافتراض أن تاريخ التسوية بعد ١ سنة من الآن

٢- قيمة الدين الأصلي في تاريخ الاتفاق

$$= ٢٠٠٠٠ \times \left(١ + \frac{٥}{١٠٠} \times ١\right)$$

= ٢١٠٠٠ جنيه

٣ - قيمة التسديدات في تاريخ الإتفاق

$$= ٦٠٠٠ \times \left(١ + \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{٧}{١٢}\right)$$

$$+ ٧٠٠٠٠ \times \left(١ + \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}\right)$$

+ س

= ٦١٧٥ + ٨١٠٠ + س

٤ - معادلة القيمة :

قيمة الدين الأصلى فى تاريخ الإتفاق = قيمة التسديدات فى تاريخ الإتفاق

٢١٠٠٠ = ٦١٧٥ + ٨١٠٠ + س

٢١٠٠٠ - ٦١٧٥ - ٨١٠٠ = س

س = ٦٧٢٥ جنيه وهو المبلغ الواجب سداده بعد سنة

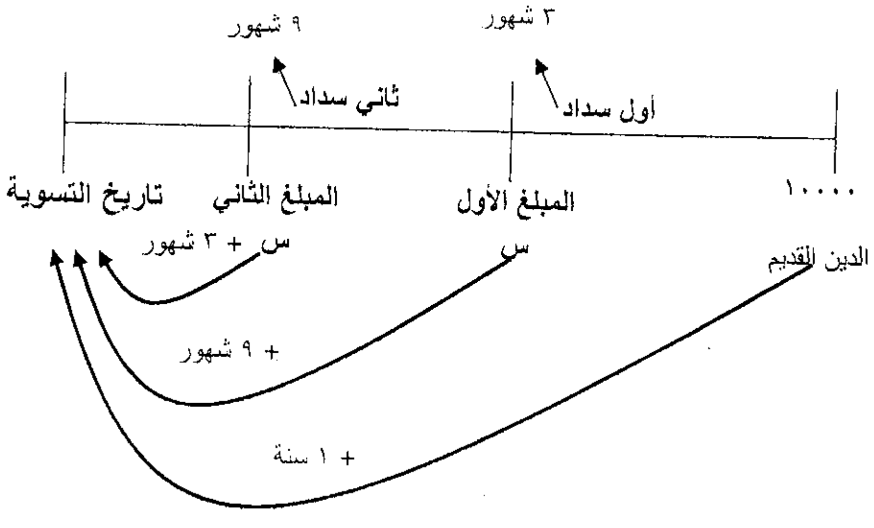
مثال

شخص معين مدين بمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد سنة من الآن فإذا وافق الدائن على أن يتم سداد هذا الائتمان بمبلغين متساويين في القيمة ولكن الأول يستحق بعد (٣) شهور والثاني يستحق بعد (٩) شهور من الآن . فما هي قيمة هذه المبالغ (الائتمان الجديد) إذا كان معدل الفائدة البسيطة السائدة هو ١٤ ٪

الحل

الديون القديمة		الديون الجديدة	
١٠٠٠٠	← بعد ١ سنة	س	← بعد ٣ شهور
		س	← بعد ٩ شهور

ع = ١٤ ٪



١ـ <u>تاريخ التسوية</u> ← بعد سنة (هو تاريخ أطول دين)

٢ ـ <u>قيمة الدين الأصلي في تاريخ التسوية</u>

$= ١٠٠٠٠ \times (١ + \frac{١٤}{١٠٠} \times ١) = ١١٤٠٠$ جنيه

٣ـ قيمة التسديدات الجديدة في تاريخ التسوية :

نفرض أن الدين الجديد الأول = س وهو يستحق بعد ٣ شهور

مدة الدين الأول = ١٢ ـ ٣ = ٩ شهور

(أي يبعد عن تاريخ التسوية بـ ٩ شهور)

نفرض أن الدين الجديد الثاني = س وهو يستحق بعد ٩ شهور

مدة الدين الثاني = ١٢ ـ ٩ = ٣ شهور

(أي يبعد عن تاريخ التسوية بـ ٣ شهور)

قيمة التسديدات فى تاريخ الاتفاق

$$= س \times (١ + \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{٧}{١٢}) + س \times (١ + \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢})$$

$$= ١,٠٣٥ \, س + ١,١٠٥ \, س$$

$$= ٢,١٤ \, س$$

٤ـ معادلة القيمة :

قيمة الدين الأصلى فى تاريخ الإتفاق = قيمة التسديدات فى تاريخ الإتفاق

$$١١٤٠٠ = ٢,١٤ \, س$$

$$س = \frac{١١٤٠٠}{٢,١٤}$$

$$= ٥٣٢٧ \text{ جنيه}$$

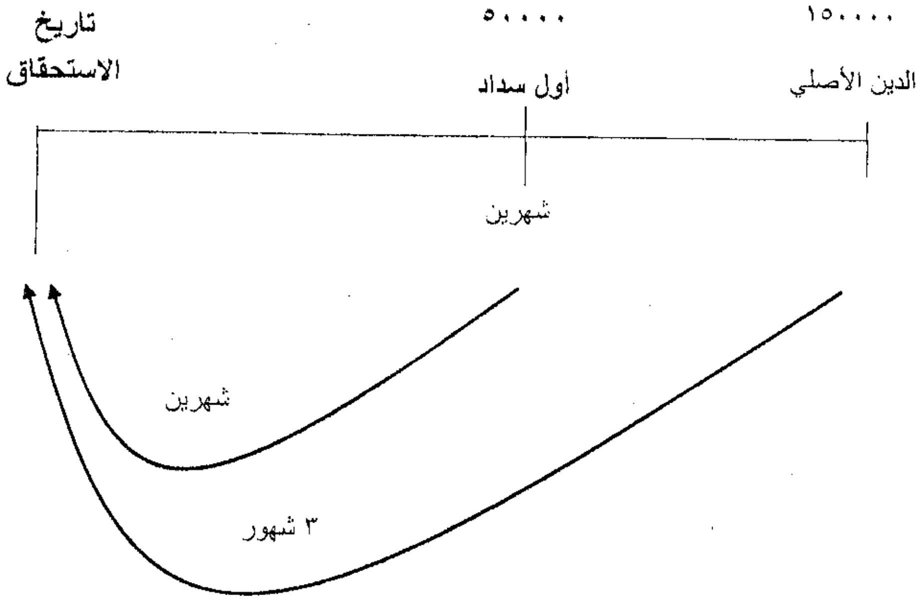
∴ قيمة الدين الجديد الأول = س = ٥٣٢٧ جنيه

∴ قيمة الدين الجديد الثانى = س = ٥٣٢٧ جنيه

مثال

مستثمر معين مدين بمبلغ ائتمان أصلي قدره ١٥٠٠٠٠ جنيه ، تستحق السداد بعد ٣ شهور من الآن ، وبعد انقضاء شهر واحد قام المستثمر بدفع مبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه من قيمة الائتمان الأصلي ، فما هو رصيد الائتمان المستحق على المستثمر في نهاية مدة الائتمان الأصلي إذا كان معدل الفائدة السنوي هو ١٥ ٪

الحل



١ـ تاريخ التسوية (التقييم) بعد ٣ شهور من الآن

٢ـ قيمة الديون القديمة في تاريخ التقييم :

= جملة مبلغ ١٥٠٠٠٠ جنيه لمدة ٣ شهور

= أ (١ + ع ن)

$$= ١٥٠٠٠٠ \times (١ + \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{٣}{١٢}) = ١٥٥٦٢٥ \text{ جنيه}$$

∴ قيمة الديون القديمة في تاريخ التسوية = ١٥٥٦٢٥ جنيه

٣- قيمة التسديدات في تاريخ التقييم

لدينا مبلغين:

الأول مبلغ ٥٠٠٠٠ جنيه تاريخ سداده بعد شهر وتاريخ التقييم بعد ٣ شهور ∴ مدته = ٣ - ١ = ٢ شهر

الثاني رصيد الائتمان = س وهو المبلغ الباقي الذى سيدفع في تاريخ التقييم بعد ٣ شهور ∴ مطابق لتاريخ التقييم

قيمة التسديدات في تاريخ التقييم = جملة مبلغ ٥٠٠٠٠ لمدة شهرين + س

= أ (١ + ع ن) + س

$$= ٥٠٠٠٠ \left(١ + \frac{١٥}{١٠٠} \times \frac{٢}{١٢} \right) + س$$

= ٥١٢٥٠ + س

٤ - معادلة القيمة :

قيمة الدين الأصلى فى تاريخ الإتفاق = قيمة التسديدات فى تاريخ الإتفاق

١٥٥٦٢٥ = ٥١٢٥٠ + س

∴ ١٥٥٦٢٥ _ ٥١٢٥٠ = س

∴ س = ١٠٤٣٧٥ جنيه

∴ رصيد الائتمان في نهاية مدة الائتمان الأصلي بعد ٣ شهور من الآن

= ١٠٤٣٧٥ جنيه

تمارين التسوية

(١) تاجر مدين بالمبالغ الأتية :

٥٠٠٠ جنية تستحق بعد ٣ شهور

٨٠٠٠ جنية تستحق بعد ٧ شهور

١٢٠٠٠ جنية تستحق بعد ٨ شهور

وقد اتفق مع الدائن علي أن يدفع له نقداً مبلغ ٤٠٠٠ جنيهاً، ويحرر له بالباقى ثلاثة كمبيالات متساوية القيمة الاسمية وتستحق الأولى بعد شهرين والثانية بعد ٤ شهور والثالثة بعد ٦ شهور أوجد القيمة الاسمية لكل من هذه الكمبيالات إذا علمت أن معدل الخصم السائد هو ٦ % سنوياً.

(٢) مستثمر مدين بالمبالغ الاتية :

٥٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور

١٠٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور

٦٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٩ شهور

أراد أستبدال اليون السابقة بدينين القيمة الاسمية للثانى ضعف القيمة الاسمية للأول ويستحق الأول بعد ٤ شهور، بينما يستحق الثانى بعد ٨ شهور . أوجد القيمة الاسمية لكل من الدينين الجديدين إذا علم أن معدل الخصم ١٢ % سنوياً.

(٣) شخص مدين بالمبالغ الأتية :

١٠٠٠ جنيةَ تستحق بعد شهرين

٢٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤ شهور

٣٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ شهور

وقد أتفق مع دائنة علي تسوية هذه الديون علي النحو التالى :

أولاً : يدفع له فوراً مبلغ ٢٠٠٠ جنيه .

ثانياً : يحرر كمبيالة قيمتها الاسمية ١٥٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ شهور .

ثالثاً : يحرر كمبيالة أخرى تستحق بعد ٧ شهور .

و المطلوب : معرفة القيمة الاسمية للكمبيالة الثانية إذا كان معدل المستخدم في التسوية هو ١٢ % سنوياً .

(٤) شخص مدين لأحد البنوك بمبلغ ١٢٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٥ شهور وقد أتفق مع البنك علي أن يدفع الأن مبلغ ٣٠٠٠ جنيه ويحرر بالباقي ثلاث كمبيالات لها نفس القيمة الاسمية وتستحق الاولى بعد ٣ شهور والثانية بعد ٦ شهور والثالثة بعد ٩ شهور، فإن كان المعدل المستخدم في البنك هو ٦ % سنوياً. فكم تكون القيمة الاسمية لكل كمبيالة ؟

(٦) تاجر مدين بالمبالغ الأتية:

٦٠٠٠ جنية تستحق بعد ٣ شهور

٩٠٠٠ جنية تستحق بعد ٦ شهور

١٢٠٠٠ جنية تستحق بعد ٨ شهور

وقد أتفق مع الدائن علي تسوية هذه الديون علي النحو التالى :

أولاً: يدفع له نقداً مبلغ ٢٠٠٠ جنيه .

ثانياً : يحرر له ثلاثة كمبيالات لكل منها نفس القيمة الاسمية وتستحق الاولى بعد شهرين والثانية بعد ٥ شهور والثالثة بعد ٧ شهور.

والمطلوب : ايجاد القيمة الاسمية لكل من هذه الكمبيالات إذا كان المعدل الذى تمت على أساسة التسوية هو٥ %سنوياً .

(٧) شركة مدينة بالمبالغ الآتية :

٢٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤٥ يوماً

٧٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٩٠ يوماً

٧٥٠٠ جنيه تستحق بعد ١٨٠ يوماً

وقد اتفق مع دائنه على استبدال هذه الديون الثلاثة بدينين لكل منها نفس القيمة الاسمية ويستحق أولهما بعد ٧٢ يوماً وثانيهما بعد ١٣٥ يوماً المطلوب : إيجاد القيمة الاسمية لكل من الدينين إذا كان المعدل ٨ % سنوياً.

(٨) شخص مدين بالمبالغ الآتية :

٦٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤ شهور

١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٩ شهور

١٢٠٠٠ جنيه تستحق بعد ١٠شهور

أراد استبدال هذه الديون بدينين القيمة الاسمية للثانى ضعف القيمة الاسمية للأول ويستحق الأول بعد ٦ شهور ويستحق الثانى بعد سنة والمطلوب: إيجاد القيمة الاسمية لكل من الدينين الجديدين بمعدل ٩ % سنويا.

(٩) رائد مدين بالديون التالية :

الأول: قيمته الاسمية ٩٠٠٠ جنيهاً تستحق فى ٢٠١٣/١١/١

الثانى: قيمته الاسمية ٤٠٠٠ جنيهاً تستحق فى ٢٠١٣/١٢/١

وفى ٢٠١٣/١٠/١ اتفق الدائن مع المدين على أن يسدد له ٥٠٠٠ جنيها ثم يحرر له بالباقى سنداً يدفع فى ٢٠١٤/١١/١. المطلوب ايجاد القيمة الاسمية للسند الجديد إذا كان معدل الخصم والفائدة ٩ % سنويا.

الباب الثاني

الفائدة المركبة

يشمل هذا الباب على دراسة الموضوعات التالية:

الفصل الأول : المفاهيم الأساسية للاستثمار طويل الأجل.

الفصل الثاني : خصم الديون.

الفصل الثالث : تسوية واستبدال الديون طويلة الأجل.

الفصل الرابع : حساب الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية بأنواعها.

الفصل الخامس : طرق استهلاك القروض طويلة الأجل.

الفصل السادس : استهلاك قروض السندات.

الفصل الأول

المفاهيم الأساسية للاستثمار طويل الأجل

مقدمة

يعتمد مفهوم الفائدة المركبة على حساب الفائدة لوحدة زمنية معينة، ثم إضافة الفائدة الناتجة فى نهاية تلك الوحدة الزمنية إلى أصل المبلغ فى نهاية هذه الوحدة الزمنية فندخل الفترة الثانية بأصل مستثمر جديد قيمته أكبر من قيمة الأصل فى الفترة السابقة بمقدار فائدة الفترة السابقة. ثم تحسب له فوائد فى الفترة الثانية ومن هنا يأتى صفة الفائدة المركبة، إن الفائدة فى نهاية كل وحدة زمنية سوف تعتبر جزءاً من رأس المال المستثمر الذى على أساسه تحسب الفائدة للوحدة الزمنية التالية مباشرة وهكذا. وهذا يعنى أن الفوائد تتراكم مع تزايد الوحدات الزمنية.

ويمكن بيان المفهوم التراكمى للفائدة المركبة، عبر الوحدات الزمنية المتتالية ومن ثم احتساب فائدة على الفائدة المتراكمة والتى تضاف للأصل فى نهاية كل فترة زمنية، وذلك على النحو التالى، وبافتراض أن الوحدة الزمنية هى السنة:

<u>السنة الأولى :</u>

الأصل أول السنة = أ

فائدة السنة الأولى (فائدة بسيطة) = أ × ع × ١ سنة

الجملة فى نهاية السنة الأولى = أصل المبلغ + فائدة السنة الأولى

الجملة فى نهاية السنة الأولى = أ + أ × ع

= أ (١ + ع)^{١} (١)

<u>السنة الثانية :</u>

الأصل أول السنة = أ (١ + ع)

فائدة السنة الثانية = الأصل × المعدل × ١

= أ (١ + ع) × ع

= أ ع + أ ع^{٢}

الجملة فى نهاية السنة = أصل المبلغ + فائدة السنة الثانية

= أ (١ + ع) + أ ع + أ ع^{٢}

= أ + أ ع + أ ع + أ ع

= أ + ٢ أ ع + أ ع^{٢}

= أ (١ + ٢ ع + ع^{٢})

= أ [(١ + ع) (١ + ع)]

= أ (١ + ع)^{٢} (٢)

السنة الثالثة :

الأصل أول السنة الثالثة = أ (١ + ع)^{٢}

فائدة السنة الثالثة = الأصل × المعدل

= أ (١ + ع)^{٢} × ع

جملة السنة الثالثة = الأصل فى بداية السنة الثالث + فائدة السنة الثالثة

= أ (١ + ع)^{٢} + أ (١ + ع)^{٢} × ع

= أ (١ + ع)^{٢} [١ + ع]

= أ (١ + ع)^{٣} (٣)

و هكذا ومن العلاقات (١) ، (٢) ، (٣) نستنتج أن :

جـ$_{ن}$ = أ (١ + ع)^{ن} (٤)

حيث :

أ ← المبلغ المستثمر أو المقترض

ع ← معدل الفائدة المركبة

ن ← مدة الاستثمار أوالاقتراض

ف ← قيمة الفائدة المركبة

حـ ← الجملة فى نهاية مدة الاستثمار أوالاقتراض

وهنا يجب ملاحظة أن الرمز (ن) فى علاقة الجملة المركبة (معادلة رقم ٤) يرمز لعدد الوحدات الزمنية والتى لايستلزم أن تكون سنوية وأنما هي يجب أن تكون من نفس معدل الفائدة المركبة . وسوف نتناول هنا بعض الأمثلة للحالات الأربعة السابقة وذلك بعد أستعراض القانون الخاص بالفائدة المركبة.

<u>استنتاج قانون الفائدة المركبة</u>

الفائدة المركبة = الجملة المركبة – أصل المبلغ

أى أن:

$$ف = جـ - أ$$

$$= أ\,(١ + ع)^{ن} - أ$$

$$= أ\,[\,(١ + ع)^{ن} - ١\,]$$

$$\text{الفائدة الركبة} = أ\,[\,(١ + ع)^{ن} - ١\,] \qquad (٥)$$

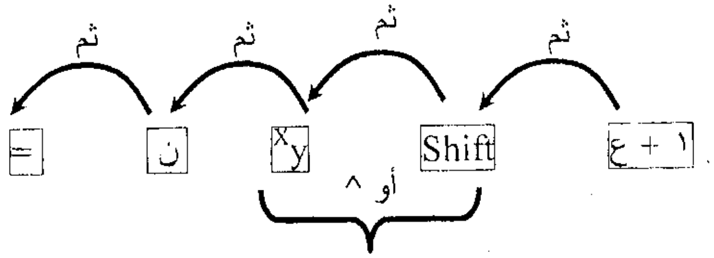
ونلاحظ أن المقدار (١ + ع)$^{\text{ن}}$ هو عبارة عن جملة الجنيه الواحد لعدد (ن) وحدة زمنية – لايشترط أن تكون سنوات – وذلك بمعدل فائدة مركبة ع. وهذا المقدار يتم إيجاده بإحد الطرق الآتية:

(١) جدوال الفائدة المركبة .

(٢) جدوال اللوغارتيمات .

(٣) الألة الحاسبة العلمية.

وسوف يتم الإعتماد بصورة أساسية فى هذا الكتاب على استخدام الألة الحاسبة (الطريقة الثالثة) عند إيجاد المقدار (١ + ع)$^{\text{ن}}$ ، وكذلك عند مناقشة باقى موضوعات الفائدة المركبة لإعتبارات السهولة وكذلك لإتساع استخدام الالات الحاسبة العلمية. <u>ويتم إيجاد المقدار (١ + ع)$^{\text{ن}}$ باستخدام الألة الحاسبة كما يلى</u> :



القوانين

يناقش هذا الفصل كيفية حساب الجملة المركبة (حيث يتم إيجادها أولاً بالقانون)، ويلى ذلك استنتاج قيمة الفائدة المركبة فى المرحلة التالية:

<u>أولاً</u>: قانون حساب الجملة المركبة

$$\boxed{\text{ح} = \text{أ} \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{ن}}}$$

<u>ثانياً</u>: قانون استنتاج الفائدة المركبة

$$\boxed{\text{ف} = \text{ح} - \text{أ}}$$

مثال

أحسب الفائدة المستحقة على مبلغ ٣٠٠٠ جنيه أودعت بمعدل فائدة مركبة ٩% لمدة ٣ سنوات و٣ شهور.

الحل

ف المركبة = ؟؟؟   أ = ٣٠٠٠   ع = ٩%

ن = ٣ + $\frac{\text{٣}}{\text{١٢}}$ = ٣,٢٥ سنة

<u>إيجاد الجملة أولاً:</u>

حـ = أ (١ + ع)$^{\text{ن}}$

= ٣٠٠٠ (١ + ٠.٠٩)$^{\text{٣,٢٥}}$

= ٣٠٠٠ (١.٠٩)$^{\text{٣,٢٥}}$

وباستخدام الألة الحاسبة نوجد (١.٠٩)$^{\text{٣,٢٥}}$ كما يلى:

$$\boxed{\text{١,٠٩}} \rightarrow \underbrace{\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{x^y}\ \text{أو}\ \wedge} \rightarrow \boxed{\text{٣,٢٥}} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{\text{١,٣٢٣}}$$

بالتعويض فى قانون الجملة

جـ = ٣٠٠٠ × ١,٣٢٣

= ٣٩٦٩ جنيه

<u>إيجاد الفائدة المركبة:</u>

ف = حـ - أ

= ٣٩٦٩ ـ ٣٠٠٠ = ٩٦٩ جنيه

مثال

اقترض شخص مبلغ ١٠٠٠ جنيه لمدة ٣ سنوات بمعدل فائدة مركبة ١٦% سنوياً. المطلوب: معرفة جملة المستحق عليه فى نهاية المدة ؟ وكذلك الفائدة المستحقة

الحل

أ = ١٠٠٠   ع = ١٦%   ن = ٣

<u>الجملة</u> :

جـ = أ (١ + ع)^ن^

= ١٠٠٠ (١ + ٠.١٦)^٣^

= ١٠٠٠ × ١.٥٦١

= ١٥٦١ جنيه

<u>الفائدة</u> :

ف = جـ - أ

= ١٥٦١ – ١٠٠٠

= ٥٦١ جنيه

ملاحظات هامة جداً

(١) إذا نص فى التمرين أن الفائدة تضاف أكثر من مرة فى السنة إلى أصل المبلغ يلزم تعديل كل من المعدل (ع) والمدة (ن) كما يلى:-

ع بعد التعديل =	المعدل المعطى (السنوى) / عدد مرات الإضافة فى السنة

وكذلك

ن بعد التعديل = المدة المعطاه بالسنوات × عدد مرات الإضافة فى السنة

ويطلق على عدد مرات إضافة الفائدة خلال السنة اسم عدد مرات التعلية خلال السنة ويوضح الجدول التالى بعض تعديلات المعدل والمدة وذلك على سبيل المثال فإذا كانت :-

الفائدة تضاف كل نصف سنة (٦ شهور)	∴ عدد مرات الإضافة في السنة = ٢	ع ÷ ٢	ن × ٢
الفائدة تضاف كل ربع سنة (٣ شهور)	∴ عدد مرات الإضافة في السنة = ٤	ع ÷ ٤	ن × ٤
الفائدة تضاف كل شهر	∴ عدد مرات الإضافة في السنة = ١٢	ع ÷ ١٢	ن × ١٢

(٢) لابد أن تكون المدة من نفس نوع المعدل و هذا يترتب عليه الآتي :

١ - إذا كان المعدل سنوي يجب أن تكون المدة بالسنوات .

٢ - إذا كان المعدل نصف سنوي يجب تحويل المدة الى أنصاف سنوات .

٣ - إذا كان المعدل ثلث سنوي يجب تحويل المدة إلى مدة ثلث سنوية .

٤ - إذا كان المعدل ربع سنوي يجب تحويل المدة إلى أرباع السنوات .

وهذا يعني أن المعدل سنقوم بتثبيته كما هو أما المدة فهي التي تتغير لتصبح من نفس نوع المعدل، فمثلا .

١ - يتم تحويل المدة السنوية إلى مدة نصف سنوية وذلك عن طريق العلاقة
المدة نصف السنوية = المدة السنوية × ٢.

٢ - يتم تحويل المدة السنوية إلى مدة ثلث سنوية وذلك باستخدام العلاقة
المدة ثلث السنوية = المدة بالسنوات × ٣.

٣ - يتم تحويل المدة السنوية إلى مدة ربع سنوية وذلك باستخدام العلاقة
المدة ربع السنوية = المدة بالسنوات × ٤.

مثال

أوجد جملة قرض قيمته ٦٠٠٠ جنيه يدفع فى نهاية ٣٠ سنة بمعدل فائدة مركبة ٦% إذا كانت الفائدة تضاف على الأصل كل ٤ شهور .

الحل

أ = ٦٠٠٠   ع = ٦%   ن = ٣٠ سنة

بما أن الفائدة تضاف كل ٤ شهور

∴ عدد مرات الإضافة خلال السنة الواحدة = ٣ مرات

يلزم تعديل ع ، ن

∴ ع بعد التعديل = $\frac{\text{٦ \%}}{\text{٣}}$ = ٢ %

∴ ن بعد التعديل = ٣٠ × ٣ = ٩٠

<u>الجملة</u> :

جـ = أ (١ + ع)$^{\text{ن}}$

= ٦٠٠٠ (١ + ٠,٠٢)$^{\text{٩٠}}$

وباستخدام الألة الحاسبة نوجد (١,٠٢)$^{\text{٩٠}}$ كما يلى:

$\boxed{\text{١,٠٢}} \rightarrow \underbrace{\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{x^y}}_{\text{أو }\wedge} \rightarrow \boxed{\text{٩٠}} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{\text{٥,٩٤٣١}}$

بالتعويض فى قانون الجملة

جـ = ٦٠٠٠ × ٥,٩٤٣١

= ٣٥٦٥٨,٦ جنيه

مثال

أحسب الجملة التى يؤول إليها مبلغ ٥٠٠٠ جنيه فى نهاية ١٥ سنة، بمعدل فائدة مركبة سنوى ٣ % علماً بأن الفائدة تضاف كل شهر.

الحل

أ = ٥٠٠٠ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ع = ٣% ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ن = ١٥

الفائدة تضاف كل شهر ∴ عدد مرات الإضافة (التعلية) فى السنة = ١٢

∴ يلزم تعديل كل من ع ، ن

∴ ع بعد التعديل = $\frac{٣\%}{١٢}$ = ٠,٢٥ %

∴ ن بعد التعديل = ١٥ × ١٢ = ١٨٠

جـ = أ (١ + ع)^{ن}

= ٥٠٠٠ (١ + $\frac{٠,٢٥}{١٠٠}$)^{١٨٠}

= ٥٠٠٠ (١,٠٠٢٥)^{١٨٠}

وباستخدام الألة الحاسبة نوجد (١,٠٠٢٥)^{١٨٠} كما يلى:

$\boxed{١,٠٠٢٥}$ ← $\underbrace{\boxed{\text{Shift}} \quad \boxed{x^y}}_{\text{أو } \wedge}$ ← $\boxed{١٨٠}$ ← $\boxed{=}$ ← $\boxed{١,٥٦٧٤}$

بالتعويض فى قانون الجملة

جـ = ٥٠٠٠ × ١,٥٦٧٤ = ٧٨٣٧ جنيه

مثال

استثمر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ٦% سنوياً لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور و ١٥ يوم، المطلوب حساب الجملة و الفائدة المستحقة فى نهاية المدة ثم احسب الجملة إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة ؟

الحل

أ = ١٠٠٠٠ جنيه $\qquad$ ع = ٦%

$$ن = ٣ + \frac{٤}{١٢} + \frac{١٥}{٣٦٠} = ٣,٣٧٥ \text{ سنة}$$

$$\therefore \text{الجملة} = أ\,(١ + ع)^{ن}$$

$$= ١٠٠٠٠\left(١ + \frac{٦}{١٠٠}\right)^{٣,٣٧٥}$$

$$= ١٠٠٠٠\,(١,٠٦)^{٣,٣٧٥}$$

وباستخدام الألة الحاسبة نوجد $(١,٠٦)^{٣,٣٧٥}$ كما يلى:

$$\boxed{١,٠٦} \rightarrow \underbrace{\boxed{\text{Shift}} \rightarrow \boxed{x^{y}}}_{\text{أو } \wedge} \rightarrow \boxed{٣,٣٧٥} \rightarrow \boxed{=} \rightarrow \boxed{١,٢١٧٣}$$

بالتعويض فى قانون الجملة

جـ = ١٠٠٠٠ × ١,٢١٧٣ = ١٢١٧٣,٢٧ جنيه

الفائدة المستحقة = جـ - أ

(ف) = ١٢١٧٣,٢٧ − ١٠٠٠٠ = ٢١٧٣,٢٧ جنيه

<u>ثانياً : إذا كانت الفائدة تضاف كل نصف سنة</u>

عدد مرات الإضافة (التعلية) فى السنة = ٢

∴ يلزم تعديل ع ، ن

∴ ع بعد التعديل = $\frac{\text{٦ \%}}{\text{٢}}$ = ٣ %

∴ ن بعد التعديل = ٣,٣٧٥ × ٢ = ٦,٧٥ سنة

∴ الجملة = أ (١ + ع)$^{\text{ن}}$

= ١٠٠٠٠ × (١ + $\frac{\text{٣}}{\text{١٠٠}}$)$^{\text{٦,٧٥}}$

= ١٠٠٠٠ (١,٠٣)$^{\text{٦,٧٥}}$

وباستخدام الآلة الحاسبة نوجد (١,٠٣)$^{\text{٦,٧٥}}$ كما يلى:

$\boxed{\text{١,٠٣}}$ $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{\text{٦,٧٥}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{١,٠٥٦٧٤}}$

أو ^

بالتعويض فى قانون الجملة

جـ = ١٠٠٠٠ × ١,٢٢٠٨١٩

= ١٢٢٠٨,١٩ جنيه

<u>الفائدة المستحقة</u>

ف = جـ - أ

= ١٢٢٠٨,١٩ – ١٠٠٠٠

= ٢٢٠٨,١٩جنيه

مثال

أوجد جملة مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه استثمر لمدة عشر سنوات وستة شهور مع العلم بإن معدل الفائدة نصف سنوى = ٢,٥% .

الحل

يلاحظ أن معدل الفائدة نصف سنوى، إذا يلزم تحويل المدة لتتفق مع المعدل كالآتى :

تعديل المدة (ن) = ١٠,٥ × ٢ = ٢١ نصف سنة

جـ = أ (١ + ع)^{ن}

= ١٠٠٠٠ (١ + ٠,٢٥)^{٢١}

= ١٠٠٠٠ (١,٠٢٥)^{٢١}

= ١٠٠٠٠ × ١,٨٦٠٢٩٥

= ١٨٦٠٢,٩٥ جنيه

ملاحظة

إذا أعطى بالتمرين عدة مبالغ مختلفة بمعدلات مختلفة يتم حساب الجملة لكل مبلغ على حدة ثم نوجد مجموع الجمل فنحصل على الرصيد.

مثال

أودع شخص ١٠٠٠٠ج فى ١/١/ ٢٠١٢ بمعدل مركب ١٠ %

ثم أودع مبلغ ١٥٠٠٠ج فى ٢٠١٢/٧/١ بمعدل مركب ١١ %

ثم أودع مبلغ ٥٠٠٠ج فى ٢٠١٣/١/١ بمعدل مركب ١٣ %

المطلوب: إيجاد جملة ما لهذا الشخص فى نهاية سنة ٢٠١٥

الحل

حساب مدة كل مبلغ

$ن_١$ (٢٠١٢/ ١/١ ـ ٢٠١٥/١٢/٣١) = ٤ سنوات

$ن_٢$ (٢٠١٢ /٧/١ ـ ٢٠١٥/١٢/٣١) = ٣,٥ سنوات

$ن_٣$ (٢٠١٣/١/١ ـ ٢٠١٥/١٢/٣١) = ٣ سنوات

حساب الجملة

$$جـ = أ (١ + ع)^{ن}$$

$$= جـ_١ + جـ_٢ + جـ_٣$$

$$= ١٠٠٠٠ (١,١٠)^{٤} + ١٥٠٠٠ (١,١١)^{٣,٥} + ٥٠٠٠ (١,١٣)^{٣}$$

$$= ١٤٦٤١,٠ + ٢١٦١٣,٣ + ٧٢١٤,٤$$

= ٤٣٤٦٨,٧ جنيه

مثال

أودع أحد الأشخاص مبلغ ١٢٠٠٠ ج فى أحد البنوك وكانت معدلات الفائدة المركبة خلال فترة الاستثمار هى :

٣% خلال الخمس سنوات الأولى، والفائدة تضاف كل نصف سنة،
٤,٥% خلال الأربع سنوات التالية، والفائدة تضاف كل سنة،

٤% خلال العشر سنوات التالية والفائدة تضاف كل ربع سنة

المطلوب:

إيجاد جملة ما لهذا الشخص فى نهاية المدة ؟

الحل

يمكن عمل تعديلات المعدلات ومدد الاستثمار كما فى الجدول التالى:

الفترة الأولى	الفترة الثانية	الفترة الثالثة
ن = ٥ ع = ٣٪ الفائدة تضاف كل $\frac{١}{٢}$ سنة أى مرتين :. ن = ٥ × ٢ = ١٠ ع = $\frac{٣٪}{٢}$ = ١,٥٪	ن = ٤ ع = ٤,٥٪ الفائدة تضاف كل سنة :. لا يوجد تعديل فى ع ، ن	ن = ١٠ ع = ٤٪ الفائدة تضاف كل $\frac{١}{٤}$ سنة أى ٤ مرات : ن = ١٠ × ٤ = ٤٠ ع = $\frac{٤ ٪}{٤}$ = ١٪

<u>حساب الجملة</u>

جـ = أ (١ + ع)^{ن}

= ١٢٠٠٠ × (١,٠١٥)^{١٠} × (١,٠٤٥)^{٤} × (١,٠١)^{٤٠}

جـ$_{١}$ تعتبر كأنها أصل للفترة الثانية

جـ$_{٢}$ تعتبر كأنها أصل للفترة الثالثة

= ١٢٠٠٠ × ١,١٦٠٥٤١ × ١,١٩٢٥١٩ × ١,٤٨٨٨٦٤

= ٢٤٧٢٦,٥ جنيه

تنبيه

استند حل المثال السابق على المفهوم الأساسى للفائدة المركبة والذى يعتبرأن الجملة المركبة فى نهاية أى فترة زمنية يمكن معاملتها على أنها أصل جديد للفترة الزمنية التالية.

استنتاج المبلغ والمعدل والمدة

يمكن من قانون الجملة المركبة استنتاج كل من المبلغ والمعدل والمدة، وذلك على النحو التالى:

<u>أولاً إيجاد المبلغ (أ)</u>

$$\boxed{\text{أ} = \frac{\text{جـ}}{(\text{١} + \text{ع})^{\text{ن}}}}$$

<u>أولاً إيجاد المدة (ن)</u>

$$\boxed{\text{ن} = \frac{\text{لو}\ \left(\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}\right)}{\text{لو}\ (\text{١} + \text{ع})}}$$

<u>أولاً إيجاد المعدل (ع)</u>

$$\boxed{\text{ع} = \text{العدد المقابل لـ} \left(\frac{\text{لو}\ \frac{(\text{حـ})}{\text{أ}}}{\text{ن}}\right) - \text{١}}$$

ملحوظة

لإيجاد العدد المقابل لرقم معين نكتب:

$$\boxed{\text{log}} \xleftarrow{\text{ثم}} \boxed{\text{shift}} \xleftarrow{\text{ثم}} \boxed{\text{الرقم}}$$

مثال

استثمر شخص مبلغ ما لمدة ٨ سنوات فبلغت الجملة ١٢٦٦٧,٧ جنيه بمعدل فائدة مركبة ٣% فما هو أصل المبلغ ؟

الحل

ن = ٨   جـ = ١٢٦٦٧,٧   ع = ٣%

$$أ = \frac{جـ}{(١ + ع)^{ن}}$$

$$أ = \frac{١٢٦٦٧,٧}{(١ + ٠,٠٣)^{٨}}$$

$$أ = \frac{١٢٦٦٧٧}{١,٢٦٦٧٧}$$

$$أ = \boxed{١٠٠٠٠ \text{ جنيه}}$$

مثال

بلغت جملة مبلغ ما بفائدة مركبة وبمعدل معين فى نهاية خمسة سنوات ٦٦٢٤٤,٨ وبعد ستة سنوات بلغت جملته ٦٧٥٦٩,٧ جنيه المطلوب إيجاد كل من معدل الفائدة المركبة وأصل المبلغ .

الحل

$$جـ = أ\,(١ + ع)^{ن}$$

$$٦٦٢٤٤,٨ = أ\,(١ + ع)^{٥} \qquad (١)$$

$$٦٧٥٦٩,٧ = أ\,(١ + ع)^{٦} \qquad (٢)$$

وبقسمة معادلة (٢) على معادلة (١) نجد أن :

وفى المعادلة (٣) نجد أن الطرف الأيسر منها مقداران أساسهما واحد وهو الأساس (١+ع) وهنا نقوم بطرح الأسس حيث أن :

إذا تصبح معادلة (٣) كالآتى :

$$ع + ١ = ١,٠٢$$

$$ع = \text{معدل الفائدة} = ١,٠٢ - ١$$

$$= ٠,٠٢ = \boxed{\%٢}$$

ولإيجاد أصل المبلغ نعوض عن قيمة (ع) فى العلاقة (١):

$$٦٦٢٤٤,٨ = أ\ (١ + ع)^{٥}$$

$$٦٦٢٤٤,٨ = أ\ (١ + ٠,٠٢)^{٥}$$

وحيث أن:

$$أ = \frac{جـ}{(١ + ع)^{ن}}$$

$$أ = \frac{٦٦٢٤٤,٨}{(١ + ٠,٠٢)^{٥}}$$

$$أ = \frac{٦٦٢٤٤,٨}{١,١٠٤٠٨٠٨}$$

$$أ = \boxed{٦٠٠٠٠ \text{ جنيه}}$$

مثال

أودع شخص مبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه وبعد مدة معينه وجد له ٧٧٩١٩,٥٢ وكان البنك يضيف الفوائد سنوياً بمعدل ١٢% على أصل المبلغ فما هى مدة الإيداع ؟

الحل

أ = ٢٠٠٠٠ حـ = ٧٧٩١٩,٥٢ ع = ١٢%

$$ن = \frac{لو \frac{(حـ)}{أ}}{لو\ (١ + ع)}$$

$$= \frac{لو \frac{٧٧٩١٩,٥٢}{٢٠٠٠٠}}{لو\ (١ + ٠.١٢)}$$

$$= \frac{لو\ ٣,٨٩٥٩٧٦}{لو\ ١,١٢}$$

$$= \frac{٠,٥٩٠٦}{٠,٠٤٩٢}$$

= $\boxed{\text{١٢ سنة تقريباً}}$

مثال

ما هى المدة اللازمة لمضاعفة مبلغ ما ثلاثة أمثال نفسه إذا كان المعدل المركب ١٣% سنوياً .

الحل

أ = ؟   حـ = ٣ أ   ع = ١٣٪

$$ن = \frac{لو \frac{(حـ)}{أ}}{لو (١ + ع)}$$

$$= \frac{لو \frac{(٣ أ)}{أ}}{لو (١ + ٠.١٣)}$$

$$= \frac{لو ٣}{لو ١.١٣}$$

$$= \frac{٠.٤٧٧١٢١٢}{٠.٠٥٣٠٧٨٤}$$

$$= \boxed{٩ \text{ سنوات}}$$

مثال

أودع شخص ١٠٠٠٠ جنيه فى بنك مصر لمدة ١٥ سنة نوجد أن جملة المستحق فى نهاية المدة ٦٠٠٠٠ جنيه فما هو معدل الفائدة المستخدم

الحل

أ = ١٠٠٠٠   حـ = ٦٠٠٠٠   ن = ١٥

$$ع = \text{العدد القابل لـ} \left(\frac{لو \frac{(حـ)}{أ}}{ن} \right) - ١$$

$$ع = \text{العدد القابل لـ} \left(\frac{\text{لو} \frac{٦٠٠٠٠}{١٠٠٠٠}}{١٥} \right) - ١$$

$$ع = \text{العدد القابل لـ} \left(\frac{\text{لو } ٦}{١٥} \right) - ١$$

$$ع = \text{العدد القابل لـ} \quad ٠,٠٥١٨٧٦٧ \quad - ١$$

$$ع = ١,١٢٦٨ \quad - \quad ١$$

$$ع = ٠,١٢٦٨ \times ١٠٠$$

$$= \boxed{\%\ ١٢,٦٨}$$

<u>خطوات إيجاد المعدل (ع) بالألة الحاسبة:</u>

١- قسمة حـ ÷ أ

٢- إيجاد اللوغاريتم Log لناتج $\frac{حـ}{أ}$

٣- القسمة ناتج خطوة (٢) على (ن)

٤- إيجاد العدد المقابل لناتج خطوة (٣) عن طريق Shift ثم Log

٥ – طرح ناتج خطوة (٤) – ١ صحيح

٦ – الضرب × ١٠٠

مثال

استثمر شخص ٢٠٠٠ جنيه لمدة ١٠ سنوات فبلغت الفائدة المركبة ٤٢١١,٧ جنيه فما هو معدل الفائدة السنوى ؟

الحل

أ = ٢٠٠٠ ، ن = ١٠ ف = ٤٢١١,٧

<u>استنتاج الجملة (جـ)</u>

حـ = أ + ف

= ٢٠٠٠ + ٤٢١١,٧

= ٦٢١١,٧ جنيه

<u>ايجاد المعدل (ع) بمعلومية الجملة:</u>

$$ع = \text{العدد القابل لـ} \left(\frac{\text{لو} \frac{(حـ)}{أ}}{ن} \right) - ١$$

$$= \text{العدد القابل لـ} \left(\frac{\text{لو} \frac{٦٢١١,٧}{٢٠٠٠}}{١٠} \right) - ١$$

ع = العدد القابل لـ ٠,٠٤٩٢١٨ – ١

= ١,١٢ – ١

= ٠,١٢٠ × ١٠٠

= $\boxed{\text{١٢ \%}}$

تمارين الجملة المركبة

(١) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠ج بمعدل فائدة مركبة ٤,٥% فأوجد الجملة والفائدة المركبة فى نهاية ١٢ سنة .

(٢) أودع شخص مبلغ ١٥٠٠٠ج أول يناير ٢٠١٢ بمعدل ٦% ثم أودع مبلغ ١٠٠٠٠ج أول يوليو من نفس العام ثم ٨٠٠٠ج أول يناير ٢٠١٣ أحسب جملة المستحق فى ٢٠١٥/١٢/٣١ .

(٣) ما هى المدة اللازمة لكى يصبح مبلغ ما ضعف نفسه إذا كان معدل الفائدة المركبة ١٠% سنوياً.

(٤) أودع شخص ١٠٠٠٠ج فى أحد البنوك لمدة ٦ سنوات فوجد رصيده ١٢٩٤٦,٠٥ فما هو معدل الفائدة المستخدم .

(٥) أودع شخص مبلغ معين بأحد البنوك بمعدل فائدة مركبة قدرها ٩% سنويا. فإذا علمت أن جملة المستحق له فى نهاية ٣ سنوات، ٣ شهور بلغ ٣٩٦٩ ج فأوجد أصل المبلغ المودع .

(٦) ما هو معدل الفائدة المركبة السنوى المحسوب على مبلغ ٣٠٠٠٠ جنيه يستثمر لمدة ثمانية سنوات لتصبح جملته ٤٢٦٦٣ جنيه.

(٧) ما هى المدة اللازمة ليصبح مبلغا قدره ٢٠٠٠٠ جنيه ما قيمته ٢٦٣٣٦,١٨ جنيها وذلك إذا كان معدل الفائدة المركب ٣,٥ % سنويا

(٨) استثمر شخص مبلغا وقدره (١٥٠٠٠) جنيه لمدة خمسة سنوات، فما هى جملة المستحق له فى نهاية هذه المدة إذا علمنا أن معدل الفائدة المركبة ٤,٥%.

(٩) استثمر شخص مبلغ قدره (٢٥٠٠٠) جنيه بمعدل فائدة مركبة ٦% لمدة ثلاث سنوات الأولى، ثم بمعدل ٥ % لمدة الثلاث سنوات التالية، إحسب جملة المستحق له طرف البنك فى نهاية مدة الاستثمار

الفصل الثاني

خصم الديون

مقدمة

يقصد بخصم الديون دفع الديون قبل ميعاد استحقاقها. والتاريخ الذى تتم فيه هذه العملية يسمى تاريخ الخصم. ومن المنطقى أن تقل القيمة التى سيتم دفعها فى هذا التاريخ عن **القيمة الأسمية** وهى قيمة الدين التى تدفع فى ميعاد الاستحقاق، والتى سوف نرمز لها بالرمز (ق س). ويطلق على المبلغ المسدد فى تاريخ الخصم وقبل موعد الاستحقاق اسم **القيمة الحالية**، والتى سوف نرمز لها بالرمز (ق ح)، فهى بذلك تمثل قيمة ما يدفعه المدين فى تاريخ الخصم (أى القيمة التى تدفع قبل ميعاد استحقاق الدين) .

ونلاحظ أن القيمة الحالية تقل عن القيمة الأسمية كلما زادت مدة الخصم . وذلك لأن المدة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الاستحقاق تمثل استفادة مؤكدة للدائن فى استيفاء دينه قبل ميعاد الاستحقاق. وفى مقابل ذلك فإن الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية يطلق عليه اسم **الخصم** وهو يمثل الفائدة أو العائد التى يعطيها الدائن للمدين نتيجة تعجيل الأخير لعملية الدفع أو نتيجة حصول الأول على دينه قبل ميعاد الاستحقاق .

ويلاحظ أن تحديد تاريخى الاستحقاق والخصم يختلف من حيث الدائن والمدين. فتاريخ الاستحقاق يحدد عند نشأة الدين بالاتفاق بين المدين والدائن. أما بالنسبة لتاريخ الخصم فهو يتوقف على استقرار حالة المدين ومدى تمكنة من دفع الدين قبل ميعاد استحقاقه ولا دخل للدائن فى تحديده.

حساب القيمة الحالية :

أن القيمة الحالية تقل بزيادة مدة الخصم وبالتالى فالعلاقة عكسية بين القيمة الحالية وبين مدة الخصم. ويمكن استنتاج هذه العلاقة من قانون الجملة السابق تناوله فى الفصل السابق فالقيمة الاسمية، التى يجب دفعها

فى ميعاد الاستحقاق، تعادل فى حقيقة الأمر الجملة المستحقة فى نهاية المدة. وعلاقة الجملة السابق الإشارة إليها تنص على:

$$ج = أ (١ + ع)^{ن}$$

ومن علاقة الجملة نجد أن المبلغ المستثمر فى بداية المدة عبارة عن:

$$أ = \frac{ج}{(١+ع)^{ن}}$$

وبصورة أخرى:

$$أ = ج \times (١ + ع)^{-ن}$$

أى أن المبلغ المستثمر (أ) يمثل، فى حقيقة الأمر، القيمة الحالية (ق ح) لمبلغ القيمة الأسمية (ق س) وبالتالى فإن المقدار $(١ + ع)^{-ن}$ هو القيمة الحالية للجنيه الواحد وهى بالتالى تساوى مقلوب جملة الجنيه الواحد بعد (ن) من الوحدات الزمنية .

قوانين القيمة الحالية والخصم

تجدر الإشارة فى البداية إلى أن نوع الخصم المستخدم فى الفائدة المركبة هو نوع وحيد، وهو الخصم الصحيح، وليس التجارى، ويرجع ذلك إلى شئ هام وهو أن الخصم التجارى أحياناً قد تزيد قيمته عن القيمة الأسمية خاصة عندما تكون مدة الخصم طويلة جداً وهو الشئ المعتاد فى الاستثمارات طويلة الأجل، ويأخذ قانون القيمة الحالية الصحيحة، الصورة التالية:

$$\boxed{ق ح = ق س (١ + ع)^{-ن}}$$

ومن ثم يمكن استنتاج قيمة الخصم والذى يمثل الفرق بين القيمة الأسمية والقيمة الحالية وذلك على النحو التالى:

$$\boxed{ص = ق س - ق ح}$$

حيث :

ق س ← القيمة الاسمية

ق ح ← القيمة الحالية

ع ← معدل الخصم

ن ← مدة الخصم

ص ← الخصم

كيفية إيجاد قيمة المقدار (١+ع)$^{-ن}$:

أن المقدار (١ + ع)$^{-ن}$ هو عبارة عن القيمة الحالية للجنيه الواحد لعدد (ن) وحدة زمنية – لايشترط أن تكون سنوات – وذلك بمعدل خصم (ع) وهذا المقدار يتم إيجاده بإحد الطرق الثلاث الأتية (كما هو الحال بالنسبة لجملة الجنيه الواحد): - أما باستخدام جدوال الفائدة المركبة. وأما باستخدام جدوال الوغارتيمات، او باستخدام الألة الحاسبة العلمية.

وسوف يتم الإعتماد على استخدام الألة الحاسبة عند إيجاد المقدار (١ + ع)$^{-ن}$ وذلك كما يلى :

[١ + ع] ثم [Shift] ثم [x^y] (أو [^]) ثم [+/-] ثم [ن] ثم [=]

ملاحظة

إذا ذكر بالتمرين أن هناك إضافة أكثر من مرة خلال العام فيتم : تعديل المدة(ن) بضــــربها فى عدد مرات إضافة الفائدة خلال السنة، وتعديل المعدل (ع) بقسمته على عدد مرات إضافة الفائدة خلال السنة.

مثال

أوجد القيمة الحالية لمبلغ ٢٢٥٠٠ جنيه تستحق الدفع في نهاية ٤ سنوات إذا كان معدل الفائدة المركبة ٥ % سنوياً ، ثم أوجد قيمة الخصم المركب .

الحل

ق ح = ؟ ، ق س = ٢٢٥٠٠ ، ن = ٤ ، ع = ٥%

القيمة الحالية

ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

= ٢٢٥٠٠ (١ + ٠,٠٥)$^{-٤}$

= ٢٢٥٠٠ × ٠,٨٢٢٧

= ١٨٥١٠,٧٥ جنيه

الخصم

ص = ق س – ق ح

= ٢٢٥٠٠ – ١٨٥١١ = ٣٩٨٩,٢٥ جنيه

مثال

تاجر مدين بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه تستحق السداد في نهاية ٦ سنوات و ٣ شهور أوجد القيمة الحالية لهذا الدين إذا علمت أن معدل الفائدة ٣,٥% سنوياً ، ثم أوجد الخصم المركب .

الحل

ق ح = ؟ ق س = ٢٠٠٠ ع = ٣,٥%

ن = ٦ سنوات + $\frac{\text{٣ شهور}}{١٢}$ = ٦,٢٥ سنة

القيمة الحالية

ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

= ٢٠٠٠٠ (١ + ٠,٠٣٥)$^{-٦,٢٥}$

= ٢٠٠٠٠ × ٠,٨٠٦٥

= ١٦١٣٠ جنيه

الخصم

ص = ق س − ق ح

= ٢٠٠٠٠ − ١٦١٣٠

= ٣٨٧٠ جنيه

مثال

أوجد القيمة الحالية لمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه تستحق الدفع في نهاية ٢٠ سنة علماً بأن معدل الفائدة ٦% تضاف الفائدة كل شهر ؟

الحل

ق ح = ؟ ق س = ١٠٠٠٠ ع = ٦%

الفائدة تضاف شهرياً ∴ عدد مرات الإضافة = ١٢ مرة خلال السنة

<u>يجب تعديل ع ، ن</u>

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{٦\%}}{\text{١٢}} = \text{٠,٥ \%}$$

ن = ٢٠ × ١٢ = ٢٤٠

<u>القيمة الحالية</u>

$$\text{ق ح} = \text{ق س}\ (\text{١} + \text{ع})^{-\text{ن}}$$

$$= \text{١٠٠٠٠} \times \left(\text{١} + \frac{\text{٠,٥}}{\text{١٠٠}}\right)^{-\text{٢٤٠}}$$

= ١٠٠٠٠ × ٠,٣٠٢٠٩٦

= ٣٠٢٠,٩٦ جنيه

مثال

أوجد القيمة الحالية لمبلغ ٧٥٠٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد سنتين، و ٩ شهور إذا كان معدل الفائدة ٦% وتضاف الفائدة كل نصف سنة

الحل

ق ح = ؟ ق س = ٧٥٠٠٠ $\text{ن} = \text{٢} + \frac{\text{٩}}{\text{١٢}} = \text{٢,٧٥سنة}$

ع = ٦% الفائدة تضاف كل نصف سنة

$$\therefore \text{عدد مرات الإضافة} = \frac{\text{١٢}}{\text{٦}} = \text{٢ مرة}$$

<u>يجب تعديل ع ، ن</u>

$\therefore$ ع = $\frac{٠,٠٦}{٢}$ = ٣ %

ن = ٢,٧٥ × ٢ = ٥,٥

<u>القيمة الحالية</u>

ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

= ٧٥٠٠٠ × (١ + ٠,٠٣)$^{-٥,٥}$

= ٧٥٠٠٠ × ٠,٨٤٩٩٥٤

= ٦٣٧٤٦,٥ جنيه

حالة وجود عدة مبالغ مطلوب خصمها أو إيجاد قيمتها الحالية

القيمة الحالية لعدة مبالغ = ق ح للمبلغ الأول

+ ق ح للمبلغ الثاني

+ ....

+ ق ح للمبلغ الأخير

قيمة الخصم = مجموع القيم الاسمية – مجموع القيم الحالية

مثال

شخص مدين لآخر بالسندات التالية : الأول قيمته الاسمية ٣٠٠٠٠ جنيه ويستحق بعد ٥ سنوات ، والثاني قيمة الاسمية ٢٠٠٠٠ جنيه يستحق بعد ٤ سنوات والثالث قيمته الاسمية ١٠٠٠٠ جنيه يستحق بعد ٣ سنوات ، وتم الاتفاق بين المدين و الدائن على سداد القيمة الحالية للسندات الثلاثة اليوم ، والمطلوب حساب القيمة الحالية للسندات وقيمة الخصم ، إذا تمت التسوية على أساس خصم مركب بمعدل ٨% سنوياً .

الحل

ق س = ٣٠٠٠٠ ن = ٥ سنوات ع = ٨%

ق س = ٢٠٠٠٠ ن = ٤ سنوات ع = ٨%

ق س = ١٠٠٠٠ ن = ٣ سنوات ع = ٨%

إيجاد القيمة الحالية للثلاث مبالغ :

$$ق\ ح = ق\ س\ (١ + ع)^{-ن}$$

$$= ٣٠٠٠٠\ (١ + ٠,٠٨)^{-٥}$$

$$+ ٢٠٠٠٠\ (١ + ٠,٠٨)^{-٤}$$

$$+ ١٠٠٠٠\ (١ + ٠,٠٨)^{-٣}$$

$$= ٢٠٤١٧,٥ + ١٤٧٠٠,٦ + ٧٩٣٨,٤$$

= ٤٣٠٥٦ جنيه

الخصم على الكمبيالات الثلاث:

الخصم = ق س للثلاث الكمبيالات – ق ح للثلاث كمبيالات

$$= (٣٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ + ١٠٠٠٠) - ٤٣٠٥٦$$

= ١٦٩٤٤ جنيه

مثال

أوجد القيمة الحالية لقرض يستحق فى نهاية عشر سنوات وأربعة شهور وثمانية أيام إذا كانت قيمته الأسمية (٢٠٠٠٠) جنيه ومعدل الفائدة المركبة ٦% سنويا .

الحل

$$\text{المدة ن بالسنوات} = ١٠\ \text{سنوات} + \frac{٤\ \text{شهور}}{١٢} + \frac{٨\ \text{يوم}}{٣٦٠}$$

$$= ١٠ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤٥}$$

= ١٠,٣٥٦ سنة

القيمة الحالية

$$ق\ ح = ق\ س\ (١ + ع)^{-ن}$$

$$= ٢٠٠٠٠\ (١ + ٠,٠٦)^{-١٠,٣٥٦}$$

= ٢٠٠٠٠ × ٠,٥٤٦٩٣٠٩ = ١٠٩٣٨,٦١٨ جنيه

مثال

قرض معين قيمته الاسمية (١٦٠٠٠) جنيه ويستحق السداد في ٢٠١٥/١٢/٣١ فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٥ % سنويا . فما هو التاريخ الذى تبلغ فيه القيمة الحالية لهذا القرض مبلغ (١٢٤٨٠) جنيه .

الحل

ق س = ١٦٠٠٠   ق ح = ١٢٤٨٠   ع = ٥ %   ن = ؟

<u>المطلوب</u> : تحديد مدة الخصم (ن) أى المدة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الاستحقاق. ثم استنتاج تاريخ الخصم ويمكن الحصول على (ن) عليها من قانون القيمة الحالية، وذلك بإخذ لوغاريتم الطرفين كما سبق إيضاحه فى الفصل السابق عند استنتاج ن من قانون الجملة المركبة وبناء على ذلك:

$$\text{ق ح} = \text{ق س} \left(١ + \text{ع} \right)^{-\text{ن}}$$

$$-\text{ن} = \frac{\text{لو} \dfrac{\text{ق ح}}{\text{ق س}}}{\text{لو} \left(١ + \text{ع} \right)}$$

$$-\text{ن} = \frac{\text{لو} \dfrac{١٢٤٨٠}{١٦٠٠٠}}{\text{لو} \left(١ + ٠{,}٠٥ \right)}$$

$$-\text{ن} = \frac{\text{لو} ٠{,}٧٨}{\text{لو} ١{,}٠٥}$$

$$-\text{ن} = \frac{-٠{,}١٠٧٩٠٥٣٩٧٣}{٠{,}٠٢١١٨٩٢٩٩٠٧}$$

- ن = - ٥ تقريباً

∴ ن = ٥ سنوات

التاريخ المطلوب (تاريخ الخصم) هو ٢٠١٠/١٢/٣١

مثال

عرض ممول على مشترى لعقار احدى الطريقتين للدفع :

<u>الأولى :</u> أن يدفع ٣٠٠٠٠٠ جنيه فورا ثمناً للعقار .

<u>الثانية :</u> أن يدفع (١٠٠٠٠٠) جنيه أخر السنة الرابعة ثم يدفع (١٢٠٠٠٠) جنيه أخر السنة السابعة ثم (١٠٠٠٠٠) جنيه أخر السنة العاشرة .

فأى الطريقيين أفضل من وجهة نظر المشترى وما مقدار الفرق بينهما إذا كان معدل الخصم المركب السائد فى السوق ٥ % سنوياً.

الحل

للمفاضلة بين البديلين نستخدم معيار القيمة الحالية، حيث نوجد القيمة الحالية لكل بديل ثم نختار البديل صاحب القيمة الحالية الأقل بإعتبار أنه الأفضل من وجهة نظر المشترى

<u>تقييم الطريقة الأولى:</u>

المبلغ الفورى فى حد ذاته يعتبر قيمة حالية يتم دفعها الآن، وبالتالى فإن ثمن شراء العقار الآن = ٣٠٠٠٠٠ جنيه تمثل القيمة الحالية للبديل الأول.

<u>تقييم الطريقة الثانية:</u>

بالنسبة للطريقة الثانية فإنه يلزم إيجاد القيمة الحالية ، وذلك باستخدام القانون كما يلى:

ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

= ١٠٠٠٠٠(١,٠٥)$^{-٤}$ + ١٢٠٠٠٠ (١,٠٥)$^{-٧}$ + ١٠٠٠٠٠ (١,٠٥)$^{-١٠}$

= ١٠٠٠٠٠ × ,٨٢٢٧ + ١٢٠٠٠٠ × ,٧١٠٦٨ + ١٠٠٠٠٠ × ,٦١٣٩١

= ٢٢٨٩٤٢,٦ جنيه

وهذا يعنى أن الطريقة الثانية أفضل المشتري

الفرق بين البديلين فهو

الفرق = ٣٠٠٠٠٠ ـ ٢٢٨٩٤٢,٦ = ٧١٠٥٧,٤ جنيه

خصم عدة كمبيالات تجارية

في حالة خصم عدة كمبيالات، أو أوراق تجارية بصفة عامة، يتقاضى البنك مقابل ذلك، ما يلى :

١ ـ الخصم الصحيح المركب:

حيث يتم حساب القيمة الحالية أولاً لكل كمبيالة على حده كالتالى:

$$\boxed{ق ح = ق س (١ + ع)^{-ن}}$$

ويلى ذلك استنتاج قيمة الخصم الصحيح لكل كمبيالة على حده:

$$\boxed{ص = ق س - ق ح}$$

٢ ـ العمولة:

وهي عبارة عن نسبة مئوية (أو الألف) تحسب علي القيمة الأسمية للورقة التجارية بصرف النظر عن المدة الباقية علي تاريخ الاستحقاق (وهي مدة الخصم).

$$\boxed{\text{العمولة =القيمة الأسمية} \times \text{معدل العمولة}}$$

٣ـ مصاريف التحصيل:

وهي أيضاً نسبة مئوية (أو فى الألف) تحسب على أساس القيمة الأسمية بغض النظر عن مدة الخصم .

$$\boxed{\text{مصاريف الخصم (التحصيل) = القيمة الأسمية} \times \text{معدل التحصيل}}$$

ملحوظة

يطلق على مجوع الخصومات السابقة اسم الأجيو أى أن :

$$\boxed{\text{الأجيو (الخصم الإجمالى) = الخصم + العمولة + مصاريف التحصيل}}$$

ويسمى المتبقى من الورقة التجارية بعد طرح الأجيو باسم صافى القطع:

أي أن : صافى قيمة القطّع = القيمة الأسمية ـ الأجيو

أو صافى قيمة القطع = القيمة الحالية ـ (العمولة + مصاريف التحصيل)

مثال

خصم شخص الكمبيالات التالية في ٢٥ يناير ٢٠١٠ لدى بنك مصر:

الأولي قيمتها الأسيمة ٢٠٠٠٠ جنية وتستحق الدفع فى ٢٥ يناير ٢٠١١

الثانية قيمتها الأسمية ٦٠٠٠٠ جنية وتستحق الدفع في ٢٥ يناير ٢٠١٢

الثالثة قيمتها الأسمية ٨٠٠٠ جنية وتستحق الدفع فى ٢٥ يناير ٢٠١٥

فإذا علمنا أن البنك المذكور يخصم الأوراق التجارية علي أساس معدل خصم صحيح مركب ٦% سنويا، وكذلك كان يتقاضى عمولة بمعدل $\frac{١}{٢}$ ٠% (نصف فى الألف) وكذلك مصاريف تحصيل بواقع ٢٠ جنيه للورقة الواحدة والمطلوب حساب صافى قيمة القطع .

الحل

نلاحظ أن تاريخ الخصم هو ٢٥ يناير سنة ٢٠١٠ وبالتالى فإن المدة الباقية على استحقاق الكمبيالة الأولى هى سنة واحدة أى أن :

مدة الخصم للكمبيالة الأولى = سنة واحدة

مدة الخصم للكمبيالة الثانية = ٢ سنة

كذلك مدة الخصم للكمبيالة الثانية = خمس سنوات .

إيجاد القيمة الحالية لهذه الكمبيالات الثلاثة

لإيجاد القيمة الحالية لهذه الكمبيالات الثلاثة نستخدم القانون الآتى لكل كمبيالة على حدة: ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

القيمة الحالية للكمبيالة الأولى = ٢٠٠٠٠ × (١,٠٦)$^{-١}$

= ٢٠٠٠٠ × ,٩٤٣٣٩٦٢٣

= ١٨٨٦٧,٩٢٤ جنيه

القيمة الحالية للكمبيالة الثانية = ٦٠٠٠٠ × (١,٠٦)$^{-٢}$

= ٦٠٠٠ × ,٨٨٩٩٩٦

= ٥٣٣٩٩,٧٦ جنيه

القيمة الحالية للكمبيالة الثالثة = ٨٠٠٠٠ × (١,٠٦)$^{-٥}$

= ٨٠٠٠٠ × ,٧٤٧٢٥٨

= ٥٩٧٨٠,٦٤ جنيه

القيمة الحالية للكمبيالات الثالثة = $\boxed{١٣٢٠٤٨,٣٢}$ جنيه

حساب العمولة و مصاريف التحصيل

مجموع القيمة الأسمية = ٢٠٠٠٠ + ٦٠٠٠٠ + ٨٠٠٠٠

= ١٦٠٠٠٠جنيه

عمولة البنك = ١٦٠٠٠٠ × $\frac{١}{٢٠٠٠}$ = ٨٠ جنيه

مصاريف التحصيل = ٢٠ × ٣ = ٦٠ جنيه

العمولة ومصاريف التحصيل = ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠ جنيه

صافى القطع = مجموع القيم الحالية ـ العمولة ومصاريف التحصيل

= ١٣٢٠٤٨,٣٢ ـ ١٤٠

= ١٣١٩٠٨,٣٢ جنيه

حل آخر

إيجاد الأجيو (إجمالى الخصم)

= الخصم الصحيح + العمولة + مصاريف التحصيل

الخصم الصحيح

= ق س – ق ح

= (٢٠٠٠٠٠ + ٦٠٠٠٠ + ٨٠٠٠٠) - ١٣٢٠٤٨,٣٢

= ١٦٠٠٠٠ - ١٣٢٠٤٨,٣٢

= ٢٧٩٥١,٦٨

الأجيو

= ٢٧٩٥١,٦٨ + ٨٠ + ٦٠

= ٢٨٠٩١,٦٨

الصافى

= مجموع القيم الأسمية - الأجيو

= ١٦٠٠٠٠ - ٢٨٠٩١,٦٨

= ١٣١٩٠٨,٣٢ جنيه

(نفس الإجابة السابقة)

مثال

كمبيالة قيمتها الأسمية ١٠٠٠٠ جنيها تستحق الدفع بعد خمس سنوات وستة شهور . والمطلوب حساب القيمة الحالية لهذه الكمبيالة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة ٦% سنوياً ، وما مقدار الخصم المستحق عليها ؟

الحل

<u>القيمة الحالية</u>

ق ح = ق س (١ + ع)$^{-ن}$

= ١٠٠٠٠ × (١,٠٦)$^{-٥,٥}$

= ١٠٠٠٠ × ٠,٧٢٥٨٠١٣

= ٧٢٥٨,٠١٣ جنيه

<u>الخصم الصحيح</u>

= ق س – ق ح

= ١٠٠٠٠ - ٧٢٥٨,٠١٣

= ٢٧٤١,٩٨٧ جنيه

تمارين الخصم

(١) تاجر مدين بمبلغ ٣٣٥٠٠ تستحق بعد سنتين وثلاثة شهور ، أوجد القيمة الحالية لهذا المبلغ علماً بأن معدل الفائدة المركبة هو ٤% ، وأن الفائدة تضاف كل ربع سنة . ثم أوجد الخصم المركب

الإجابة (٣٠٦٣٠,٣٨٤)

(٢) أوجد القيمة الحالية لمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ١٠ سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة هو ٦% سنوياً وتضاف كل شهر ثم أوجد الخصم المركب.

الإجابة (١٠٩٩٢,٦٥)

(٣) احسب القيمة الحالية لمبلغ ٢٥٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ١٥ سنة بمعدل خصم مركب = ٦ % سنويا .

(٤) إذا كانت القيمة الحالية لقرض قيمته الاسمية ٥٠٠٠٠ جنيه هى ١٤٠٠٦,٥ جنيه فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٤,٥ % سنويا فما هى مدة القرض .

(٥) عرض ممول على شخص شراء عقار معين بمبلغ ٦٥٠٠٠٠ جنيها فورا أو أن يدفع ٢٠٠٠٠٠ جنيها فورا وأن يحرر بالباقى سندا اذنيا بمبلغ ٥٠٠٠٠٠ جنيها . ويستحق الدفع بعد ٥ سنوات . فإذا علمت أن معدل الخصم المركب السائد فى السوق المالية وقت الشراء كانت ٦% سنويا . فالمطلوب معرفة أى العرضين أفضل للمشترى .

(٦) سند قيمتة الأسمية ١٠٠٠٠ جنيهاً يستحق الدفع بعد ١٠ سنوات ونصف أوجد القيمة الحالية لهذه السند إذا علمت أن معدل الخصم (الحطيطة) الصحيحة ٤,٣ % سنوياً.

(٧) أوجد القيمة الحالية لمبلغ (٢٠٠٠٠) جنيه يستحق بعد سنة ، من الآن على أساس معدل فائدة سنوى ٥,٢٥ % .

(٨) أحسب مدة قرض قيمته الأسمية ٣٠٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ٤,٥% سنويا إذا كانت قيمته الحالية ٨٤٠٣,٩ جنيه .

(٩) دين قيمتة الأسمية ٥٠٠٠٠ جنيه ويستحق السداد بعد عشرين سنة وستة شهور، وعشرة أيام فإذا كان معدل الفائدة المركبة ٧ %سنويا فكم يدفع المدين الآن لسداد هذا الدين .

(١٠) إحسب القيمة الحالية لمبلغ (٨٠٠٠) جنيه يستحق السداد بعد ٦سنوات وثلاثة شهور بمعدل ربع سنوى قدره ٤ %.

(١١) أوجد القيمة الحالية لمبلغ ٥٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٧سنوات وثلاثة شهور من الآن على أساس معدل فائدة سنوى ٨ % يدفع على أربعة مرات فى السنة .

(١٢) إحسب القيمة الحالية لمبلغ ١٥٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ستة سنوات وستة شهور من الآن على أساس معدل فائدة سنوى ٦ % يدفع مرتين فى السنة .

(١٣) بلغت القيمة الحالية لمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه مبلغا وقدره ١٥٦٢٤ جنيه فإذا كانت مدة الخصم هى عشرة سنوات . فما هو معدل الفائدة المركبة.

(١٤) بلغت جملة قرض معين في نهاية خمسة سنوات مبلغاً وقدرة ١٢٨٨ جنية فإذا كان معدل الفائدة ٥ % فما هو قيمة أصل القرض .

(١٥) عرض ممول مصنع للبيع بإحدى الطريقتين التاليتين :

الأولى: دفع ١٢٠٠٠٠ جنيه فوراً

الثانية: دفع ١٢٠٠٠ جنيه فوراً عند الشراء ، ، (٦٠٠٠٠) جنيه تدفع فى نهاية السنة الثالثة ، (٦٠٠٠٠) جنيه فى نهاية السنة السادسة.

فأى الطريقين أفضل للمشترى وذلك إذا كان معدل الفائدة المركبة السائد فى السوق ٥ % سنوياً.

الفصل الثالث

تسوية واستبدال الديون طويلة الأجل

مقدمة

تسوية الديون هى إتفاق بين المدين والدائن على طريقة دفع الدين وغالبا مايتم استبدال بعض الديون القديمة بعدة ديون جديدة (أو دين واحد) يكون أيسر فى طريقة الدفع على المدين، والحالة الأخيرة هذه تتضمن غالبا أن يتم تأجيل سداد الدين فترة معينة تلى ميعاد الاستحقاق. إلا أن الشائع دائما أن يمنح الدائن خصما معينا للمدين وذلك لتشجيعه على دفع الدين قبل ميعاد استحقاقه. وهذه الحالة الأخيرة تعنى أن يتقدم موعد سداد الدين بمدة معينة. وهنا يقوم المدين بسداد " القيمة الحالية " عن المدة من تاريخ السداد إلى تاريخ الاستحقاق . وبطبيعة الحال ستقل قيمة الدين بمقدار الخصم الممنوح للمدين نتيجة تعجيله سداد الدين قبل ميعاد استحقاقه ومن ذلك نستنتج أن:

<u>الحالة الأولى</u> سداد قيمة الدين قبل تاريخ استحقاقه بفترة زمنية قدرها ن

عند سداد قيمة الدين قبل تاريخ استحقاقه بفترة زمنية قدرها ن يتم دفع القيمة الحالية للدين ويتم حسابها بالقانون التالى:

$$\text{القيمة الحالية للدين} = \text{أصل الدين} \times (١ + ع)^{-ن} \qquad (١)$$

<u>حيث</u>

ن: هى المدة من تاريخ الخصم إلى تاريخ الاستحقاق الفعلى، والحالة السابقة الخاصة بتقديم موعد سداد الدين قد تتضمن :

(أ) تقديم موعد سداد الديون القديمة بحيث تستبدل بدين واحد سيدفع بعد فترة أقصر من الديون القديمة.

(ب) تقديم موعد سداد الديون القديمة بعدة ديون جديدة.

الحالة الثانية: تطبيق معادلة القيمة

أن تسوية الديون هو الاتفاق على طريقة معينة لدفعها أما بالنسبة لاستبدال الديون فالمقصود بها أن تحل عدة ديون جديدة محل عدة ديون قديمة. فهى عملية مرتبطة تماما بتسوية الدين أو هنا تعديل شروط التسوية وهذا التعديل لشروط التسوية يتم الإتفاق عليه فى تاريخ معين يسمى تاريخ التسوية . وفى هذا التاريخ يتم :

(١) إيجاد قيمة الديون القديمة حسب تواريخها وبالمقارنة بتاريخ التسوية وهناك ثلاث احتمالات يمكن أن يحدث أحدها، وهى :

- الاحتمال الأول : أن يكون الدين القديم سابق لتاريخ التسوية وبالتالي فإن الدين القديم نوجد له الجملة من تاريخ استحقاقة إلى تاريخ التسوية .
- الاحتمال الثانى :أن يكون الدين القديم لاحق لتاريخ التسوية وبالتالى فإننا نوجد القيمة الحالية للدين القديم من تاريخ استحقاقة ورجوعا إلى تاريخ التسوية .
- الاحتمال الثالث: أن يكون تاريخ الدين القديم هو نفس تاريخ التسوية، وفى هذه الحالة نترك الدين كما هو بقيمته الأصلية

(٢) إيجاد قيمة الديون الجديدة وذلك أيضاً بمقارنة تواريخ استحقاقاتها بتاريخ التسوية ونلاحظ أننا سنقابل نفس الاحتمالات الثلاثة السابقة .

(٣) تطبيق معادلة القيمة بما أن قيمة الديون القديمة يتم سدادها بقيمة الديون الجديدة ولذلك فمن المنطقى أن نكون القيمتين متساويتين وذلك فى تاريخ التسوية أى أن :

$$\boxed{\text{قيمة الديون القديمة = قيمة الديون الجديدة}} \qquad (٢)$$

والمعادلة السابقة تسمى معادلة القيمة وهى صحيحة فى جميع الحالات الممكنة لتاريخ التسوية . فعلى سبيل المثال إذا كان تاريخ التسوية هو الأن (تاريخ اليوم) فإن معادلة القيمة تأخذ الصورة التالية :

$$\boxed{\text{القيمة الحالية للديون القديمة = القيمة الحالية للديون الجديدة}} \qquad (٣)$$

وهذه الحالة تمثل أبسط صورة ممكنة لمعادلة القيمة حيث يتم توحيد القانون المستخدم وهو القانون الخاص بالقيمة الحالية للدين الأصلى وبصفة عامة فإن معادلة القيمة رقم (٢) تحدد العلاقة بين قيمة أى دين فى تاريخ التسوية والقيمة الأصلية للدين فى ثلاث صور وهى :

<u>الصورة (١)</u>

قيمة الدين فى تاريخ التسوية = القيمة الأصلية للدين × $(١+ع)^{ن}$

والصورة الأولى تستخدم إذا كانت قيمة الدين تستحق السداد قبل تاريخ التسوية .

<u>الصورة (٢)</u>

قيمة الدين فى تاريخ التسوية = القيمة الأصلية للدين × $(١+ع)^{-ن}$

والصورة الثانية تستخدم إذا كانت قيمة الدين تستحق السداد بعد تاريخ التسوية .

<u>الصورة (٣)</u>

وهى حالة خاصة ، تتعلق بإتفاق تاريخ استحقاق الدين الأصلى مع تاريخ التسوية، ففى هذه الحالة نجد أن العلاقة (٢) تأخذ الشكل الخاص التالى:

قيمة الدين فى تاريخ التسوية = القيمة الأسمية للدين

ومن المعروف أن القيمة الأسمية للدين هى قيمة الدين فى ميعاد استحقاقه وفى الحقيقة فإن عدم تعيين تاريخ للتسوية فى التمرين لا يؤثر اطلاقا على دقة أوصحة الحل من عدمه حيث أن استخدام أي تاريخ للتسوية يعطى نفس النتائج . إلا أن مراعاة حسن اختيار تاريخ التسوية يؤثر كثيرا على تسهيل العمليات االحسابية .

والأن نتناول بعض الأمثلة التطبيقية التى توضح ما سبق.

مثال

شخص مدين بالديون التالية :

١٠٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٥ سنوات من الآن .

٢٠٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ٧ سنوات من الآن .

وقد أراد المدين أن يستبدل ديونه بدين واحد يستحق السداد بعد ٣ سنوات من اليوم . فما هو مبلغ الدين الجديد ؟ وذلك على فرض أن معدل الفائدة المركب ٦% سنويا .

الحل

يلاحظ هنا أن الديون القديمة سيتم دفعها على النحو التالى:

الدين الأول ١٠٠٠٠ ج سيتم دفعها قبل ٥ سنوات من ميعاد استحقاقها .

والدين الثانى ٢٠٠٠٠ ج سيتم دفعها قبل ٧ سنوات من ميعاد استحقاقها .

والآن يمكن تقييم ما يجب دفعه الآن أى إذا رغب المدين فى دفع ما عليه الآن فسوف يسدد القيمة الحالية للديون السابقة حيث:

القيمة الحالية = أصل الدين × $(١ + ع)^{-ن}$

$$= ١٠٠٠٠ \times (١,٠٦)^{-٥} + ٢٠٠٠٠ \times (١,٠٦)^{-٧}$$

$$= ١٠٠٠٠ \times ,٧٤٧٢٦ + ٢٠٠٠٠ \times ,٦٦٥٠٦$$

$$= ٧٤٧٢,٦ + ١٣٣٠١,٢$$

$$= ٢٠٧٧٣,٨ \text{ جنيه} \qquad (١)$$

بالنسبة للدين الجديد فيتم إيجاد قيمته الآن أى قيمته الحالية قبل ميعاد استحقاقه بثلاث سنوات .

القيمة الحالية للدين الجديد = أصل الدين × $(١ + ع)^{-ن}$

القيمة الحالية للدين الجديد = س × (١ + ع) $^{-ن}$

حيث س: القيمة الأسمية للدين الجديد

القيمة الحالية للدين الجديد = س × (١ + ٠,٠٦) $^{-٣}$

القيمة الحالية للدين الجديد = س × ٠,٨٣٩٦٢

= ٠,٨٣٩٦٢ س (٢)

وبما أن قيمتى الديون القديمة والجديدة تتساوى الآن حيث أن الدين الجديد المفروض أنه سيسدد الديون القديمة الآن .

القيمة الحالية للديون االقديمة = القيمةالحالية للديون الجديد

٢٠٧٧٣,٨ = ٠,٨٣٩٦٢ س

س (القيمة الأسمية للدين الجديد) = $\frac{٢٠٧٧٣,٨}{٠,٨٣٩٦٢}$

= ٢٤٧٤١,٩ جنيه

نلاحظ فى التمرين السابق أن الديون القديمة كانت قيمتها الأسمية = ٣٠٠٠٠ جنيه وقد تم تعجيل دفعها قبل تواريخ استحقاقها ولذلك فإن القيمة الحالية للديون القديمة (والتى تساوى القيمة الحالية للديون الجديدة) تقل بمقدار الخصم أى أن :

مقدار الخصم على الديون كلها

= القيمة الأسمية للديون – مجموع القيم الحالية

= ٣٠٠٠٠ – ٢٤٧٤١,٩

= ٥٢٥٨,١ ج

مثال

شخص مدين لآخر بموجب الكمبيالات التالية :

الأولى قيمتها الأسمية ٦٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٣ سنوات

الثانية قيمتها الأسمية ٨٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٥ سنوات

الثالثة قيمتها الأسمية ؟ جنيه تستحق بعد ٧ سنوات

فإذا علمت أن المدين أتفق مع الدائن على أن يدفع له نقدا مبلغا وقدره ٦٦٦١٢,٤ جنيها وأن يحرر له بالباقى كمبيالة جديدة قيمتها الأسمية ٧١٥٥١,١ جنيها وتستحق الدفع بعد ٤ سنوات فإذا علمت أن التسوية على أساس أن معدل الفائدة المركبة ٤,٥% سنويا فالمطلوب حساب القيمة الأسمية للكمبيالة الثالثة .

الحل

١) بإفتراض أن تاريخ التسوية الأن

٢) إيجاد القيمة الحالية للديون القديمة

$$= ٦٠٠٠٠ \times (١,٠٤٥)^{-٣}$$

$$+ ٨٠٠٠٠ \times (١,٠٤٥)^{-٥}$$

$$+ \text{س} \times (١,٠٤٥)^{-٧}$$

$$= ٦٠٠٠٠ \times ٠,٨٧٦٢٩٦٦$$

$$+ ٨٠٠٠٠ \times ٠,٨٠٢٤٥١٠٥$$

$$+ \text{س} \times ٠,٧٣٤٨٢٨٤٦$$

$$= ١١٦٧٧٣,٨٨ + ٠,٧٣٤٨٢٨٤٦ \text{ س}$$

٣) القيمة الحالية للديون الجديدة

= القيمة الحالية للكمبيالة الجديدة + ما تم دفعه نقداً

= ٧١٥٥١,١ (١+ ٠,٠٤٥)$^{-٤}$ + ٦٦٦١٢,٤

= ٥٩٩٩٩,٩ + ٦٦٦١٢,٤

= ١٢٦٦١٢,٤ جنيه

٤) تطبيق معادلة القيمة

القيمة الحالية للديون القديمة = القيمة الحالية للديون الجديدة=
١١٦٧٧٣,٨٨ + ٠,٧٣٤٨٢٨٤٦ س = ١٢٦٦١٢,٤

٩٨٣٨,٥ = ٠,٧٣٤٨٢٨٤٦ س

القيمة الأسمية للثالثة = $\frac{٩٨٣٨,٥}{٠,٧٣٤٨٢٨٤٦}$ = ١٣٣٨٨,٩ جنيه

مثال

تاجر مدين لأخر بالكمبيالات التالية :

٦٠٠٠٠ جنيه تستحق الدفع فى منتصف مارس سنة ٢٠١٠ .

١٠٠٠٠٠ جنيه تستحق الدفع فى منتصف مارس سنة ٢٠١٣ .

١٤٠٠٠٠ جنيه تستحق الدفع فى منتصف مارس سنة ٢٠١٨ .

وقد أتفق المدين مع الدائن فى منتصف مارس سنة ٢٠١٣ على أن يدفع له فوراً مبلغ ١٢٧٧٩٧,١٨ جنيه وأن يحرر بالباقي كمبيالتين جديدتين القيمة الأسمية للأولى ضعف القيمة الأسمية للثانية وتستحق الأولى في منتصف مارس سنة ٢٠١٦ والثانية فى منتصف مارس سنة ٢٠١٧ فما هى القيمة الأسمية للكمبيالتين الجديدتين علما بأن معدل الفائدة المركبة ٦%سنوياً .

الحل

ملاحظات على الديون القديمة

- يلاحظ أن الكمبيالة الأولى تأخر المدين عن سدادها فى ميعاد الاستحقاق أى أن هذا الدين (٦٠٠٠٠) استحق فعلا قبل تاريخ التسوية وبالتالى فإن قيمة الدين الأول فى تاريخ التسوية

جملة الدين = قيمة الدين (١+ع)^{ن}

- أما بالنسبة للكمبيالة الثانية فنلاحظ أن تاريخ استحقاق هذه الكمبيالة هو نفسة تاريخ التسوية وفى هذه الحالة فإن :

قيمة الدين الثانى فى تاريخ التسوية = نفس القيمة الأسمية للدين

- أما بالنسبة للكمبيالة الثالثة فإن ميعاد استحقاقها لاحق لتاريخ التسوية ولذلك فإننا نحصل على قيمتها الحالية فى تاريخ التسوية أى أن :

قيمة الدين الثالث فى تاريخ التسوية = القيمة الحالية

ق ح= القيمة الاسمية × (١+ع)$^{-ن}$

خطوات الحل :

١) تاريخ التسوية منتصف مارس سنة ٢٠١٣

٢) قيمة الديون القديمة فى تاريخ التسوية

= جملة الكمبيالة الأولى + ق س للكمبيالة الثانية + ق ح للكمبيالة الثالثة

= ٦٠٠٠٠ × (١,٠٦)^{٣} + ١٠٠٠٠٠ +١٤٠٠٠٠ × (١,٠٦)$^{-٥}$

=٦٠٠٠ × ١,١٩١٠١٦ + ١٠٠٠٠٠ + ١٤٠٠٠٠ × ٠,٧٤٧٢٥٨١٧

= ٧١٤٦٠,٩٦ + ١٠٠٠٠٠ + ١٠٤٦١٦,١٣ = $\boxed{٢٧٦٠٧٧,٠٩}$ جنيه

٣) قيمة الديون الجديدة فى تاريخ التسوية

بفرض أن القيمة الأسمية للكمبيالة الثانية = س

∴ القيمة الأسمية للكمبيالة الأولي = ٢ س

القيمة الحالية للأولى = ٢س × $(١,٠٦)^{-٣}$

= ٢س ×٨٣٩٦١٩٢٨, = ١,٦٧٩٣٣٢٨ س

القيمة الحالية للثانية = س ×$(١,٠٦)^{-٤}$

= ٧٩٢٠٩٣٦٦, س

القيمة الحالية للديون الجديدة = ١,٦٧٩٣٢٣٨ س + ٧٩٢٠٩٣٦٦, س

= $\boxed{\text{٢,٤٧١٤١٧٤ س}}$

٤) تطبيق معادلة القيمة

قيمة الدين القديمة = قيمة الديون الجديدة + المبلغ النقدى

٢٧٦٠٧٧,٠٩ = ٢,٧٤٧١٧٤ س + ١٢٧٧٩٧,١٨

٢٧٦٠٧٧,٠٩ – ١٢٧٧٩٧,١٨ = ٢,٤٧١٤١٧٤ س

١٤٨٢٧٩,٩١ = ٢,٤٧١٤١٧٤ س

س = $\frac{١٤٨٢٧٩,٩١}{٢,٤٧١٤١٧٤}$ = ٦٠٠٠٠ جنيه

∴ القيمة الأسمية للكمبيالة الثانية = ٦٠٠٠٠ جنيه

∴ القيمة الأسمية للكمبيالة الأولى = ٦٠٠٠٠ × ٢

= ١٢٠٠٠٠ ج

مثال

شخص مدين بالمبالغ التالية : ١٥٠٠٠ جنيه تستحق بعد سنة واحدة ، ٣٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤ سنوات وقد اتفق المدين مع الدائن على أن يدفع فورا مبلغ (٦٠٠٠) جنيه والباقى يقوم بسداده بموجب كمبيالتين القيمة الأسمية للأولى نصف القيمة الأسمية للكمبيالتين الجديدتين أوجد القيمة الأسمية لكل كمبيالة إذا كان معدل الفائدة المركب ٥ % سنوياً

الحل

١) نعتبر تاريخ التسوية هو تاريخ اليوم (الآن).

٢) القيمة الحالية للديون القديمة :

$$= ١٥٠٠٠ \times (١,٠٥)^{-١} + ٣٠٠٠٠ \times (١,٠٥)^{-٤}$$

$$= ١٥٠٠٠ \times ,٩٥٢٣٨ + ٣٠٠٠٠ \times ,٨٢٢٧$$

$$= ١٤٢٨٥,٧ + ٢٤٦٨١$$

$$= \boxed{٣٨٩٦٦,٧} \text{ جنيه}$$

٣) القيمة الحالية للديون الجديدة :

نفرض أن القيمة الأسمية للكمبيالة الثانية = ٢س

القيمة الأسمية للكمبيالة الأولى = س

القيمة الحالية للديون الجديدة = $س \times (١,٠٥)^{-٥} + ٢س \times (١,٠٥)^{-٦}$

$$= ,٧٨٣٥٣ س + ٢ \times ,٧٤٦٢٢ س$$

$$= ,٧٨٣٥٣ س + ١,٤٩٢٤٤ س$$

$$= \boxed{٢,٢٧٥٩٧ س}$$

وقد تم دفع مبلغ فورى قدره ٦٠٠ جنيه

الباقى على المدين كديون قديمة = ٣٨٦٦.٦٧ – ٦٠٠

= ٣٢٩٦.٦٧

) تطبيق معادلة القيمة

قيمة الدين القديمة = قيمة الديون الجديدة + المبلغ النقدى

٣٨٩٦٦,٧ = ٢,٢٧٥٩٧ س + ٦٠٠٠

٣٨٩٦٦,٧ - ٦٠٠٠ = ٢,٢٧٥٩٧ س

٣٢٩٦٦,٧ = ٢,٢٧٥٩٤ س

$$س = \frac{٣٢٩٦٦,٧}{٢,٢٧٥٩٧} = ١٤٤٨٤,٦٨ \text{ جنيه}$$

القيمة الأسمية للكمبيالة الأولى = ١٤٤٨٤,٦٨ ج

القيمة الأسمية للكمبيالة الثانية = ١٤٤٨٤,٦٨ × ٢

= ٢٨٩٦٩,٣٦ ج

تمارين تسوية الديون

(١) شخص مدين بمبلغ ٦٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٤ سنوات، بمبلغ ٧٠٠٠ جنيه تستحق بعد ٦ سنوات وقد اتفق مع الدائن على أن يدفع له فورا مبلغ ٥٠٠٠ جنيه ويسدد الباقى بموجب كمبيالتين جديدتين القيمة الأسمية للأولى ضعف القيمة الأسمية للثانية وتستحق الأولى بعد ٣ سنوات والثانية بعد ٥ سنوات فأوجد القيمة الأسمية للكمبيالتين الجديدتين على فرض أن معدل الفائدة المركبة ٦ %سنويا .

(٢) شخص مدين بالمبالغ الأتية من أحد البنوك

١٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد سنتان ونصف

٢٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد أربعة سنوات ونصف

٣٠٠٠٠ جنيه تستحق بعد ستة سنوات ونصف

إتفق على سداده جميعاً بعد أربعة سنوات ونصف فما هو المبلغ الواجب سداده بعد أربعة سنوات ونصف إذا كان معدل الفائدة المركبة ٥% سنويا

(٣) شخص مدين بالمبالغ الأتية:

٦٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد سنتان ونصف

٧٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد ثلاث سنوات ونصف

١٠٠٠٠ جنيه تستحق السداد بعد أربعة سنوات ونصف

وقد اتفق مع الدائن على أن يدفع له فورا مبلغ ٥٠٠٠ جنيه ويسدد الباقى بموجب كمبيالتين جديدتين القيمة الأسمية للأولى ثلث القيمة الأسمية للثانية وتستحق الأولى بعد ٧,٥ سنة والثانية بعد ٨,٥ سنة فأوجد القيمة الأسمية للكمبيالتين الجديدتين إذا كان معدل الفائدة المركبة ٨ % سنويا يدفع على أربعة فى السنة.

الفصل الرابع

حساب الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية بأنواعها

مقدمة

الدفعات المتساوية هى مبالغ متساوية تدفع على فترات زمنية متساوية وبصفة دورية ومنتظمة.

ويوجد نوعين أساسيين من الدفعات، وذلك بحسب تاريخ دفع الدفعة، وهما:

- دفعات عادية وتسمى (سداد) وتدفع فى نهاية كل فترة زمنية.
- دفعات فورية وتسمى (استثمار) وتدفع فى بداية كل فترة زمنية.

كما يمكن تقسيم الدفعات إلى :

- دفعات مؤجلة : وهى الدفعات التى يبدأ دفع مبالغها أو إيجاد جملتها بعد مرور مدة زمنية معينة تسمى مدة التأجيل ويرمز لمدة التأجيل بالرمز م .
- دفعات غير مؤجلة : وهى الدفعات التى يبدأ دفع مبالغها من الفترة الزمنية الأولى المباشرة ويتم إيجاد جملتهابد سداد الدفعة الأخيرة مباشرة.

وسوف نتناول فى هذا الفصل ما يلى:

- حساب جملة الدفعات المتساوية بأنواعها.
- حساب القيمة الحالية للدفعات المتساوية بأنواعها.

(سواء أكانت الدفعات مؤجلة أم غير مؤجلة)

الرموز المستخدمة

ط ← مقدار الدفعة

ن ← عدد الدفعات

ع ← معدل الاستثمار

م ← مدة التأجيل (إن وجدت)

القوانين

نظراً لاختلاف مدة استثمار كل دفعة عن غيرها فعند حساب جملة كل دفعة على حده تأخذ جمل الدفعات بفائدة مركبة، وكذلك القيمة الحالية لها شكل متوالية هندسية، وبتطبيق قانون مجموع المتوالية الهندسية على تلك الجمل أو القيم الحالية يمكن الحصول على مجموعة من القوانين التى تستخدم فى إيجاد الجملة والقيمة الحالية للدفعات بأنواعها المختلفة وذلك على الحو التالى:

أولاً: إيجاد الجملة والقيمة الحالية للدفعات غير المؤجلة

جدول رقم (١) قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية غير المؤجلة العادية

نوع الدفعة / المطلوب	عادية (سداد) غير مؤجلة
الجملة	$جـ = ط \times \frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع}$
القيمة الحالية	$ح = ط \times \frac{١ - (١+ع)^{-ن}}{ع}$

جدول رقم (٢) قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية غير المؤجلة غير العادية *

نوع الدفعة / المطلوب	غير عادية (فورية) غير مؤجلة
الجملة	$جـ = ط \times \frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع} \times (١ + ع)$
القيمة الحالية	$ح = ط \times \frac{١ - (١+ع)^{-ن}}{ع} \times (١ + ع)$

* تم الحصول على علاقات الدفعات الفورية بجدول (٢) بضرب علاقات الدفعات العادية الموجودة بجدول (١) × المقدار (١ + ع)

ملاحظات

١) يمكن إعادة كتابة قوانين الدفعات الفورية غير المؤجلة الموضحة بجدول رقم (٢) بصورة أخرى مبنية على فك الأقواس والضرب فى مكونات المقدار(١ + ع) فى كما هو موضح بالجدول التالى رقم (٣)

جدول رقم (٣) إعادة صياغة قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات المتساوية غير المؤجلة غير العادية

نوع الدفعة / المطلوب	غير عادية (فورية) غير مؤجلة
الجملة	$\text{جـ} = \text{ط} \times \dfrac{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}+\text{١}} - \text{١}}{\text{ع}} - \text{١}$
القيمة الحالية	$\text{ح} = \text{ط} \times \dfrac{\text{١} - (\text{١}+\text{ع})^{-\text{ن}+\text{١}}}{\text{ع}} + \text{١}$

٢) إذا لم يذكر نوع الدفعة يفترض أنها عادية .

٣) الدفعات قد تكون سنوية أى يتم دفع الدفعة فى أول السنة (إذا كانت فورية) وفى آخر السنة (إذا كانت عادية)، وقد تكون الدفعات نصف سنوية أو ربع سنوية ......

٤) يراعى فى جميع الأحوال أن يكون هناك إتفاق بين كل من: مدة الدفعة (سنوية ـ نصف سنوية ـ ربع سنوية ... إلخ) وبين نوع المعدل (سنوى ـ نصف سنوى ـ ربع سنوى ... إلخ) وبين (ن).

فمثلاً إذا كانت الدفعة نصف سنوية فلابد أن يكون المعدل نصف سنوى ويكون لدينا دفعتان فى السنة الواحدة.

مثال

قام أحد الأشخاص بإيداع ١٠٠٠ جنيه فى أخر كل سنة فى حسابه باحد البنوك فإذا علمت أن البنك يحسب فائدة بمعدل ٤,٥% سنوياً فأحسب جملة حساب هذا الشخص فى البنك فى نهاية ١٠ سنوات فى حالة عدم سحب أى مبلغ من حسابه خلال هذه الفترة.

الحل

ط = ٥٠٠ آخر ← دفعات عادية ع = ٤,٥% ن = ١٠ سنوات

جـ = ؟؟؟؟؟؟

نطبق جملة الدفعات العادية :

$$\text{حـ} = \text{ط} \times \frac{(\text{١} + \text{ع})^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{ع}}$$

$$\text{حـ} = \text{١٠٠٠} \times \frac{(\text{١} + \text{٠,٠٤٥})^{\text{١٠}} - \text{١}}{\text{٠,٠٤٥}}$$

$$\text{حـ} = \text{١٠٠٠} \times \text{١٢٢٨٨٢,٠}$$

$$\text{حـ} = \text{١٢٢٨٨,٢ جنيه}$$

مثال

في التمرين السابق أوجد جملة المستحق للشخص إذا كان الإيداع يتم أول كل سنة ؟

الحل

أول كل سنة ⟵ ∴ دفعات غير عادية

نطبق جملة الدفعات غير العادية :

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \frac{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}+\text{١}} - \text{١}}{\text{ع}} - \text{١}$$

$$\text{جـ} = \text{١٠٠٠} \times \frac{(\text{١}+\text{٠,٠٤٥})^{\text{١٠}+\text{١}} - \text{١}}{\text{٠,٠٤٥}} - \text{١}$$

$$\text{جـ} = \text{١٠٠٠} \times \left(\frac{(\text{١,٠٤٥})^{\text{١١}} - \text{١}}{\text{٠,٠٤٥}} - \text{١} \right)$$

$$= \boxed{\text{١٢٨٤١,١٨}} \text{ جنيه}$$

مثال

ما هي قيمة الدفعة السنوية التي يجب وضعها في حساب استهلاك الآلات في نهاية كل سنة حتى تتمكن احدى الشركات من إعادة شراء الألة المستهلكة والتي تبلغ قيمتها ٣٠٠٠٠٠ جنيه بعد ١٠ سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركب ٤ % سنوياً .

الحل

ط = ؟؟؟ حـ = ٣٠٠٠٠٠ ن = ١٠ ع = ٤

نطبق جملة الدفعات العادية : نهاية ⟵ دفعات عادية

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \frac{(١ + \text{ع})^{\text{ن}} - ١}{\text{ع}}$$

$$٣٠٠٠٠٠ = \text{ط} \times \frac{(١ + ٠,٠٤)^{١٠} - ١}{٠,٠٤}$$

$$٣٠٠٠٠٠ = \text{ط} \times ١٢,٠٠٦١٠٧$$

$$\text{ط} = \frac{٣٠٠٠٠٠}{١٢,٠٠٦١٠٧}$$

$$= \boxed{٢٤٩٨٧,٢٨}\ \text{جنيه}$$

مثال

اتفق شخص على إيداع قسط أول كل سنة قدره ٧٠٠٠ج ولمدة ٨ سنوات متتالية لدى إحدى البنوك فإذا علم أن معدل الفائدة السائد ١٢% سنوياً، المطلوب: إيجاد جملة المستحق للعميل فى نهاية المدة.

الحل

ط = ٧٠٠٠ ن = ٨ سنوات ع = ١٢ % جـ = ؟

أول كل سنة ⟵ ∴ دفعات غير عادية

جملة الدفعات غير العادية :

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \frac{(١+\text{ع})^{\text{ن}+١} - ١}{\text{ع}} - ١$$

$$\text{جـ} = ٧٠٠٠ \times \frac{(١+٠,١٢)^{٨+١} - ١}{٠,١٢} - ١$$

$$= ٧٠٠٠ \times \left(\frac{(١,١٢)^{٩} - ١}{٠,١٢} - ١ \right)$$

$$= ٧٠٠٠ \times ١٣,٧٧٥٦٥٦١٣\ \text{جنيه}$$

$$= \boxed{٩٦٤٢٩,٥٩}\ \text{جنيه}$$

مثال

قامت إحدى الشركات باقتراض ٥٦٠٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة ٨% سنوياً وتعهدت بسداد أصل القرض على ١٥ قسطاً سنوياً فما هى قيمة القسط السنوى المتساوى.

الحل

حـ = ٥٦٠٠٠٠ ج　　ع = ٨ %　　ن = ١٥　　ط = ؟

نظراً لأنه لم يحدد نوع الدفعة　　∴ نفرض أن الدفعة (القسط) عادية

<u>نطبق جملة الدفعات العادية :</u>

$$\text{حـ} = \text{ط} \times \frac{(1 + \text{ع})^{\text{ن}} - 1}{\text{ع}}$$

$$560000 = \text{ط} \times \frac{(1 + 0{,}08)^{15} - 1}{0{,}08}$$

$$560000 = \text{ط} \times 27{,}15211139$$

$$\text{ط} = \frac{560000}{27{,}1521139}$$

ط = $\boxed{20624{,}5}$ جنيه

مثال

يودع شخص فى بداية كل فترة زمنية مبلغ ٥٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ٩ % ولمدة ٨ سنوات أوجد جملة ما يستحقه هذا الشخص إذا كانت الفائدة تضاف كل شهرين.

الحل

بداية كل فترة ⟵ ∴ دفعات غير عادية

ط = ٥٠٠　　ع = ١٢%　　ن = ٨ سنوات　　حـ = ؟؟

∵ الفائدة تضاف كل شهرين

∴ عدد مرات الإضافة خلا ل السنة = ٦ مرات

أولاً : يجب تعديل ع ، ن

$$\therefore \text{ع} = \frac{0{,}09}{6} = 1{,}5\ \%\quad ،$$

$$\text{ن} = ٨ \times ٦ = ٤٨$$

<u>نطبق جملة الدفعات غير العادية :</u>

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \frac{(١+\text{ع})^{\text{ن}+١} - ١}{\text{ع}} - ١$$

$$\text{جـ} = ٥٠٠ \times \frac{(١+٠,٠١٥)^{٤٨+١} - ١}{٠,٠١٥} - ١$$

$$= ٥٠٠ \times \left(\frac{(١,٠١٥)^{٤٩} - ١}{٠,٠١٥} - ١ \right)$$

$$= ٥٠٠ \times ٧٠,٦٠٨٦٩٧٥٧٦ = \boxed{٣٥٣٠٤,٣٤٨٨} \text{ جنيه}$$

مثال

قام أحد الأشخاص بشراء سيارة ثمنها الفورى ١٢٠٠٠٠ج دفع منها ٦٠٠٠٠ج نقداً فى الحال واتفق على سداد الباقى على ١٠ دفعات سنوية فما هى قيمة الدفعة السنوية إذا علمت أن معدل الفائدة السائد ٧ % سنوياً والدفعة تسدد أخر كل سنة

الحل

ع = ٧ %   أخر ⟵ عادية   ن = ١٠   ط = ؟؟

باقى الثمن = ١٢٠٠٠٠ – ٦٠٠٠٠

= ٦٠٠٠٠ جنيه ⟵ يمثل قيمة حالية للدفعات العادية

<u>نطبق القيمة الحالية للدفعات العادية</u>

$$\frac{(١+\text{ع})^{-\text{ن}}}{\text{ع}}$$

$$٦٠٠٠٠ = \text{ط} \times ٧,٠٢٣٥٨١٥$$

$$\text{ط} = \frac{٦٠٠٠٠}{٧,٠٢٣٥٨١٥} = \boxed{٨٥٤٢,٦٥} \text{ جنيه}$$

ثانياً: إيجاد الجملة والقيمة الحالية للدفعات المؤجلة

جدول رقم (٤) قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات العادية المؤجلة

المطلوب \ نوع الدفعة	عادية
الجملة	$\text{جـ} = \text{ط} \times \left[\frac{(\text{١} + \text{ع})^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{ع}} \right] \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$
القيمة الحالية	$\text{ح} = \text{ط} \times \left[\frac{\text{١} - (\text{١} + \text{ع})^{-\text{ن}}}{\text{ع}} \right] \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$

جدول رقم (٥) قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات غير العادية المؤجلة

المطلوب \ نوع الدفعة	فورية
الجملة	$\text{جـ} = \text{ط} \times \left[\frac{(\text{١} + \text{ع})^{\text{ن}} - \text{١}}{\text{ع}} \right] \times (\text{١} + \text{ع}) \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$
القيمة الحالية	$\text{جـ} = \text{ط} \times \left[\frac{\text{١} - (\text{١} + \text{ع})^{-\text{ن}}}{\text{ع}} \right] \times (\text{١} + \text{ع}) \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$

ويمكن إعادة صياغة القوانين الواردة بجدول رقم (٥) بإدخال المقدار (١ + ع) لنحصل على الصورة التالية الواردة بجدول (٦)

جدول رقم (٦) قوانين الجملة والقيمة الحالية للدفعات غير العادية المؤجلة

المطلوب \ نوع الدفعة	فورية
الجملة	$\text{جـ} = \text{ط} \times \left[\frac{(\text{١} + \text{ع})^{\text{ن} + \text{١}} - \text{١}}{\text{ع}} - \text{١} \right] \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$
القيمة الحالية	$\text{ح} = \text{ط} \times \left[\frac{\text{١} - (\text{١} + \text{ع})^{-\text{ن} + \text{١}}}{\text{ع}} + \text{١} \right] \times (\text{١} + \text{ع})^{\text{م}}$

مثال

أودع شخص فى البنك ٨٠٠٠ جنيه لمدة ٣ سنوات ثم توقف عن الإيداع واتفق مع البنك على أن يحصل على جملة ما له بعد ٤ سنوات من تاريخ سداد مبلغ الدفعة الأخيرة وذلك بمعدل فائدة مركبة ٤ % احسب الجملة علماً بأن الفائدة تضاف كل ٣ شهور.

الحل

ط = ٨٠٠٠ ن = ٣ م = ٤ ع = ٤ %

∵ الفائدة تضاف كل ٣ شهور

أى أن عدد مرات الإضافة فى السنة = ٤ مرات

∵ لم يذكر نوع الدفعات نعتبرها دفعات عادية، مؤجلة لوجود (م)

<u>تعديل كل ع ، ن ، م</u>

∴ ع = $\frac{٤ \%}{٤}$ = ١ %

ن = ٣ × ٤ = ١٢

ل = ٤ × ٤ = ١٦

<u>تطبيق جملة الدفعات العادية المؤجلة</u>

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع} \right] \times (١ + ع)^{م}$$

$$جـ = ٨٠٠٠ \times \left[\frac{(١+٠,٠١)^{١٢} - ١}{٠,٠١} \right] \times (١ + ٠,٠١)^{١٦}$$

= ٨٠٠٠ × ١٢,٦٨٢٥٠٣ × ١,١٧٢٥٧٨٦٤٥

= ١١٨٩٦٩,٨٥٧ جنيه

مثال

أودع شخص فى بداية كل ٣ شهور لمدة ٣ سنوات مبلغ ١٠٠٠ جنيه فى حسابه بالبنك بمعدل فائدة مركبة ربع سنوى ٣% المطلوب: معرفة جملة المستحق له بعد دفع آخر دفعة ، ثم أوجد ما يستحق له بعد مرور عامين بعد دفع آخر دفعة.

الحل

ن = ٣ ط = ١٠٠٠ ع = ٣% ربع سنوى م = ٢

الفائدة تضاف كل ٣ شهور ⟵ عدد مرات الاضافة = ٤ مرات

بداية ⟵ فورية (غير عادية)

تعديل كل ع ، ن ، م

تعديل ن = ٣ × ٤ = ١٢

تعديل م = ٢ × ٤ = ٨

ع = ٣% ربع سنوى (لا يتم تعديله)

تطبيق جملة الدفعات غير العادية غير المؤجلة

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع}\right] \times (١ + ع)$$

$$= ١٠٠٠ \times \left[\frac{(١+٠,٠٣)^{١٢} - ١}{٠,٠٣}\right] \times (١ + ٠,٠٣)$$

$$= ١٠٠٠ \times ١٤,١٩٢ \times ١,٠٣$$

= ١٤٦١٧,٧٩ جنيه

ثانياً : جملة الدفعات الفورية المؤجلة :

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع}\right] \times (١ + ع) \times (١ + ع)^{م}$$

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+٠,٠٣)^{١٢} - ١}{٠,٠٣}\right] \times (١ + ٠,٠٣) \times (١ + ٠,٠٣)^{٨}$$

$$= ١٠٠٠ \times ١٤,١٩٢ \times ١,٠٣ \times ١,٢٦٦٧$$

= ١٨٥١٧ جنيه

حل آخر :

الجملة الفورية المؤجلة = الجملة الفورية غير المؤجلة × $(١ + ع)^{م}$

= ١٤٦١٧,٧٩ $(١,٠٣)^{٨}$ = ١٨٥١٧ جنيه

مثال

يودع شخص فى أحد شركات التأمين مبلغ ١٠٠٠٠ج آخر كل سنة لمدة ٧ سنوات ثم توقف عن الإيداع لمدة ٣ سنوات أخرى فإذا علمت أن متوسط سعر الفائدة المركبة خلال تلك السنوات ١٢% سنوياً ، المطلوب إيجاد رصيد الشخص فى نهاية المدة ؟

الحل

ط = ١٠٠٠٠ ن = ٧ م = ٣ ع = ١٢%

آخر ← دفعات عادية مؤجلة لوجود (م) الرصيد = جـ = ؟؟

نطبق جملة عادية مؤجلة

$$\text{جـ} = \text{ط} \times \left[\frac{(1+\text{ع})^{\text{ن}} - 1}{\text{ع}}\right] \times (1 + \text{ع})^{\text{م}}$$

$$= 10000 \times \left[\frac{(1+0.12)^{7} - 1}{0.12}\right] \times (1 + 0.12)^{3}$$

$$= 10000 \times 10.09 \times 1.40 = \boxed{141260} \text{ جنيه}$$

مثال

أودع شخص فى البنك ١٠٠٠ جنيه لمدة ٣ سنوات ثم توقف عن الإيداع واتفق مع البنك على أن يحصل على جملة ما له بعد ٤ سنوات من تاريخ سداد مبلغ الدفعة الأخيرة وذلك بمعدل فائدة مركبة ٨% احسب الجملة علماً بأن الفائدة تضاف كل ٣ شهور.

الحل

ط = ١٠٠٠ ن = ٣ م = ٤ ع = ٨% حـ = ؟

الفائدة تضاف كل ٣ شهور ∴ عدد مرات الإضافة فى السنة = ٤ مرات

∴ لم يذكر نوع الدفعات نعتبرها دفعات عادية ، مؤجلة لوجود (م)

أولاً : تعديل ع ، ن ، م

$$\therefore \text{ع} = \frac{0.08}{4} = 2\%$$

$$\text{ن} = 3 \times 4 = 12$$

$م = ٤ \times ٤ = ١٦$

<u>نطبق جملة عادية مؤجلة</u>

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع}\right] \times (١ + ع)^{م} .$$

$$= ١٠٠٠ \times \left[\frac{(١+٠,٠٢)^{١٢} - ١}{٠,٠٢}\right] \times (١ + ٠,٠٢)^{١٦}$$

$= ١٨٤١١,٩$ ج

مثال

أودع شخص فى بداية كل فترة زمنية مبلغ ١٠٠٠ جنيه لمدة ٣ سنوات بمعدل مركب ربع سنوى ٣% أحسب جملة المستحق بعد مرور عامين من تاريخ آخر دفعة علماً بان الفائدة تضاف كل ربع سنة

الحل

ط = ١٠٠٠ ج ن = ٣ ع = ٣% ربع سنوى حـ = ؟ م = ٢

تضاف الفائدة كل ربع سنة أى عدد مرات الإضافة فى السنة = ٤ مرات

بداية ⟵ دفعات فورية ومؤجله لوجود (م)

<u>أولاً : تحويل ع ، ن ، م</u>

$ن = ٣ \times ٤ = ١٢$

$م = ٢ \times ٤ = ٨$

ع = ٣% ⟵ ربع سنوى (لا يتم تعديله بالقسمة على ٤)

<u>نطبق جملة عادية مؤجلة</u>

$$جـ = ط \times \left[\frac{(١+ع)^{ن} - ١}{ع}\right] \times (١ + ع)^{م}$$

$$= ١٠٠٠ \times \left[\frac{(١+٠,٠٣)^{١٢} - ١}{٠,٠٣}\right] \times (١ + ٠,٠٣)^{٨}$$

$= ١٨٥١٧,٣٨$ جنيه

تمارين الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

(١) إحسب كل من الجملة والقيمة الحالية لدفعة عادية ربع سنوية قيمتها ٣٠٠٠ جنيه لمدة ٥ سنوات بمعدل فائدة مركبة ١٢ %

(٢) أوجد الجملة والقيمة الحالية لدفعة سنوية فورية مدتها ١٢ سنة ومقدارها ٢٠٠٠ جنيه علي أساس معدل فائدة ٩ % سنوياً .

(٣) أودع شخص فى بنك مبلغ ٧٠٠ جنيه فى أخر كل سنة ولمدة خمس سنوات ثم أخذ يؤدع مبلغ ٨٠٠ جنيه خلال الخمس سنوات التالية ثم ٩٠٠ جنيه خلال الأربع سنوات التالية . فماهى جملة المستحق لهذا الشخص فى نهاية ١٤ سنة وماهى الجملة إذا كانت الدفعات تدفع فى أول كل سنة أى أنها دفعات غير عادية .

(٤) أودع شخص في بنك معين مبلغ ١٠٠٠٠ أخر كل سنة ولمدة ٧ سنوات ثم أودع مبلغ ٥٠٠٠ جنيه خلال الثلاث سنوات التالية .فما هى جملة المستحق لهذا الشخص فى نهاية العشر سنوات . إذا كان معدل الفائدة ٦% سنوياً

(٥) أوجد جملة دفعة عادية سنوية تدفع لمدة لمده ١٥ سنة وقيمة كل منها مبلغ ١٥٠٠ جنيه وذلك في نهاية ١٥ سنة إذا كان معدل الفائدة المركبة ٧% وما هى جملة الدفعات فى نهاية ٢٠ سنة

(٦) أودع شخص فى بنك معين ٨ دفعات سنوية متساوية قدر كل منها ٢٠٠٠ جنيه بمعدل فائدة مركبة ٥ %سنوياً . أحسب جملة المستحق له فى البنك بعد سداد الدفعة الأخيرة مباشرة ، ثم أوجد الجملة بعد مرور ٥ سنوات من سداد الدفعة الأخيرة.

(٧) أودع شخص فى بنك معين ١٠ دفعات سنوية متساوية قدر كل منها ١٠٠٠ جنيه بمعدل مركبة ٦ % سنويا أحسب جملة المستحق له فى البنك فى الحالات الآتية بعد سداد الدفعة الأخيرة مباشرة، ثم أوجد الجملة بعد مرور ٥ سنوات من سداد الدفعة الأخيرة.

(٨) أودع مستثمر في بنك معين مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أول كل سنة لمدة ٥ سنوات ثم أودع ٣٠٠٠ جنيه خلال ال ٥ سنوات التالية ثم ٢٠٠٠ جنيه خلال الخمس سنوات الأخيرة فما هي جملة المستحق له في نهاية الخمس عشر سنة بمعدل ٨ % سنويا .

(٩) يرغب أب أن يحصل أبنه على دفعة سنوية مقدارها ٢٠٠٠ جنيه ولمدة خمسة عشر سنة إبتداء من آخر السنة الأولى فما هو المبلغ الواجب أن يدفعه الأب الآن للبنك لكي يحصل الأبن على هذه الدفعة من البنك إذا كان معدل الفائدة = ٦% .

(١٠) يودع شخص في بداية كل شهرين ابتداءً من أول يناير ٢٠١١ مبلغ ٧٥٠ جنيه بمعدل فائدة مركب سنوي اسمي ١٠ % المطلوب: إيجاد مجموع ما يستحق له في ٢٠١٥/١٢/٣١

(١١) دفعة سنوية مدتها ١٥ سنة ومبلغها الدوري ٣٥٠ جنيه وكان معدل الفائدة المركبة السائد في السوق ٦% سنوياً

أوجد :

أولاً : جملة هذه الدفعة في نهاية ١٥ سنة إذا كانت :

أ – الدفعة عادية

ب- الدفعة فورية

ثانياً : القيمة الحالية للدفعة إذا كانت :

أ – الدفعة عادية

ب- الدفعة فورية

ثم أوجد الجملة والقيمة الحالية للدفعات العادية والفورية إذا اتفق على أن يتأخر سدادها لمدة (٥) سنوات أخرى ؟

الفصل الخامس

طرق استهلاك القروض

طويلة الأجل

يقصد باستهلاك القروض عملية سداد القروض وفوائدها وتتم بعدة طرق أهمها، الثلاث طرق الآتية :

١- طريقة الأقساط المتساوية من الأصل والفائدة معاً .

٢- طريقة الاستهلاكات المتساوية من الأصل فقط .

٣- طريقة الاحتياطي المستثمر.

١ - استهلاك القروض بطريقة الأقساط المتساوية من الأصل والفائدة معا

تعنى أن الدين يسدد القرض على أقساط متساوية ، كل قسط عبارة عن جزء من القرض يسمى الاستهلاك وجزء من الفائدة معنى ذلك أن كل قسط سوف يتكون من جزئين:

جزء من الأصل ← يسمى بالاستهلاكات

جزء من الفائدة ← يسمى بالفائدة

ويلاحظ في هذه الطريقة أن الأقساط كلها متساوية وأن الاستهلاكات تتزايد بينما الفائدة تتناقص. فمثلاً .. إذا كانت قيمة القسط المتساوي هي ١٠٠٠ جنيه

فإن القسط الأول ١٠٠٠ جنيه، قد يتكون من:

الاستهلاك الأول=٦٠٠ جنيه   والفائدة = ٤٠٠ جنيه

القسط الثاني١٠٠٠ جنيه، قد يتكون من:

الاستهلاك الثاني =٧٠٠ جنيه   والفائدة = ٣٠٠ جنيه

القسط الثالث=   ١٠٠٠ جنيه، قد يتكون من:

الاستهلاك الثالث = ٨٠٠ جنيه   والفائدة = ٢٠٠ جنيه

.... وهكذا

الرموز

مبلغ القرض ← ض

القسط المتساوى ← ط

الاستهلاك السنوى ← ك

عدد الأقساط (عدد السنوات) ← ن

إيجاد القسط المتساوى :

$$\text{القسط المتساوى} = \text{القرض} \times \frac{\text{ع}}{١ - (١ + \text{ع})^{-\text{ن}}} \quad ....(١)$$

أو القسط المتساوى = الاستهلاك الأخير (١ + ع)   ....(٢)

ويلاحظ أن :

- العلاقة (١) تستخدم إذا كان معلوماً قيمة القرض والمعدل ومدة القرض وتتم الحسابات الخاصة بها بإستخدام الألة الحاسبة .
- العلاقة (٢) تستخدم إذا علمنا قيمة الاستهلاك الأخير والمعدل .

العلاقة بين الاستهلاكات المختلفة

* الاستهلاك الأول

ك ١ = القسط المتساوى – فائدة القرض لمدة سنة

= ط – القرض × ع × ١

* الاستهلاك الثانى

ك ٢ = ك ١ (١ + ع)

الاستهلاك الثالث

ك ٣ = ك ٢ (١ + ع)

الاستهلاك الرابع

ك ٤ = ك ٣ (١ + ع)

وهكذا ....

* $\frac{\text{أى استهلاك}}{\text{الاستهلاك السابق له}}$ = ١ + ع

فمثلاً :

$\frac{\text{ك ٥}}{\text{ك ٤}}$ = ١ + ع ،

$\frac{\text{ك٣}}{\text{ك٢}}$ = ١ + ع

* مبلغ القرض = مجموع الاستهلاكات

مبلغ القرض = ك$_{١}$ + ك$_{٢}$ + ك$_{٣}$ + ...

*مجموع الفوائد التى يتحملها المدين =

مجموع الأقساط المدفوعة – مبلغ القرض

<u>أى أن:</u>

مج ف = ط × ن - ض

* إذا طلب تصوير جدول استهلاك القرض يتم تكوين الجدول التالى:

عمود (٣) – عمود (٤)   عمود (٢) – عمود (٤)

١	٢	٣	٤	٥	٦
السنة	رصيد القرض فى أول السنة	القسط المتساوى	استهلاك السنة	فائدة السنة	رصيد القرض فى آخر السنة
١	ض	ط	ك$_{١}$	ف$_{١}$	ض – ك$_{١}$
٢	ض – ك$_{١}$		ك$_{٢}$		ض – ك$_{١}$ – ك$_{٢}$
٣	وهكذا	رقم ثابت فى كل السنوات	أرقام تتزايد	أرقام تتناقص	وهكذا
٤	وهكذا				وهكذا
					صفر
٥	رصيد القرض في آخر سنة		الاستهلاك الأخير		

=

يجب أن يكون هذان الرقمان متساويان

مثال

اقترض شخص مبلغ (١٠٠٠٠) جنيهاً وتعهد بسدادها على (٤) أقساط سنوية متساوية من الأصل والفائدة معاً، بمعدل فائدة مركبة ١٦% سنوياً .

المطلوب :

١ - احسب القسط المتساوى .

٢ - أحسب الاستهلاكات المختلفة .

٣ - أحسب مجموع الفوائد التى تحملها المدين .

٤ - صور جدول الاستهلاك .

الحل

القرض = ١٠٠٠٠   عدد الأقساط (ن) = ٤   ع = ٠,١٦

١ - القسط المتساوى = القرض × $\frac{ع}{١ - (١+ع)^{-ن}}$

$= ١٠٠٠٠ \times \frac{٠.١٦}{١ - (١.١٦)^{-٤}}$

= ١٠٠٠٠ × ٠,٣٥٧٣٧٥٠٦٩ = ٣٥٧٣,٧٥١ جنيهاً.

تم حساب قيمة القسط باستخدام الألة الحاسبة على النحو التالى :

$\frac{٠.١٦}{١ - (١,١٦)^{-٤}}$

١.١٦   shift   ×   ٤   (-)   =

-   ١   =   (-)   ÷   ٠.١٦   =

,٣٥٧٣٧٥٠٦٩   ×   ١٠٠٠٠   =   ,٣٥٧٣٧٥٠٦٩

٢ ـ الاستهلاك الأول

ك ١ = القسط المتساوى ـ فائدة القرض لمدة سنة

= ط ـ القرض × ع × ١

$= ٣٥٧٣,٧٥١ - ١٠٠٠٠ \times \frac{١٦}{١٠٠} \times ١$

$= ٣٥٧٣,٧٥١ - ١٦٠٠ = ١٩٧٣,٧٥١$

الاستهلاك الثانى ـــــ ك ٢ = ك ١ (١ + ع)

$= ١٩٧٣,٧٥١ (١,١٦) = ٢٢٨٩,٥٥١$

الاستهلاك الثالث ـــــ ك ٣ = ك ٢ (١ + ع)

$= ٢٢٨٩,٥٥١ (١,١٦) = ٢٦٥٥,٨٧٩$

الاستهلاك الرابع ـــــ ك ٤ = ك ٣ (١ + ع)

$= ٢٦٥٥,٨٧٩ (١,١٦) = ٣٠٨٠,٨٢$

٣- مجموع الفوائد التى تحملها المدين =

= مجموع الأقساط المدفوعة ـ القرض

= مبلغ القسط × عدد الأقساط ـ القرض

$= (٣٥٧٣,٧٥١) \times ٤ = ١٠٠٠٠$

$= ١٤٢٩٥,٠٠٤ - ١٠٠٠٠$

= ٤٢٩٥,٠٠٤ جنيهاً .

٤- تصوير جدول الاستهلاك .

السنة	رصيد أول السنة	القسط المتساوى	الإستهلاك	الفائدة	رصيد أخر السنة
١	١٠٠٠٠	٣٥٧٣.٧٥١	١٩٧٣.٧٥١	١٦٠٠	٨٠٢٦.٢٤٩
٢	٨٠٢٦.٢٤٩	٣٥٧٣.٧٥١	٢٢٨٩.٥٥١	١٢٨٤.٢	٥٧٣٦.٦٩٨
٣	٥٧٣٦.٦٩٨	٣٥٧٣.٧٥١	٢٦٥٥.٨٧٩	٩١٧.٨٧٢	٣٠٨٠.٨١٩
٤	٣٠٨٠.٨١٩	٣٥٧٣.٧٥١	٣٠٨٠.٨٢	٤٩٢.٩٣١	٠٠٠٠٠٠٠
مجـ		١٤٢٩٥.٠٠٤	١٠٠٠٠.٠٠	٤٢٩٥.٠٠٤	

ملاحظات:

١- نبدأ بملأ خانة القسط المتساوى من ناتج القسط بأرقام مكررة فى جميع السنوات .

٢- ثم نملأ خانة الاستهلاك المتساوى بقيم الاستهلاكات: ك١ ، ك ٢ ، ك ٣ ، ك ٤

٣- نملأ خانة الفائدة بطرح عمود (٣) – عمود (٤) أى طرح القسط – الاستهلاك المقابل له .

٤- نضع رصيد القرض فى بداية السنة الأولى بالكامل فى بداية السنة وللحصول على القرض آخر السنة الأولى نطرح عمود (٢) – عمود (٤) أي طرح قرض السنة الأولي - استهلاك السنة .

٥- رصيد أول السنة الثانية = رصيد آخر السنة الأولى .

<u>حيث</u>

*رصيد أول السنة الأولى = مبلغ القرض كاملاً (١٠٠٠٠)

*الفائدة = القسط المتساوى - الاستهلاك

$ف_١$ = ٣٥٧٣,٧٥١ – ١٩٧٣,٧٥١ = ١٦٠٠

$$ف_٢ = ٣٥٧٣,٧٥١ - ٢٢٨٩,٥٥١ = ١٢٨٤,٢$$

.... وهكذا

*رصيد آخر السنة = رصيد أول السنة - استهلاك السنة

رصيد آخر السنة الأولى= ١٠٠٠٠ - ١٩٧٣,٧٥١ = ٨٠٢٦,٢٤٩

*رصيد آخر السنة الأولى = رصيد أول السنة الثانية

.... وهكذا

مثال

إذا علمت أن قيمة الاستهلاك الثانى لقرض معين يستهلك على ٥ سنوات هو ٩٤٠٢ ج وقيمة الاستهلاك الثالث ٩٩٦٦ احسب معدل الفائدة المركبة وقيمة القرض والقسط المتساوى من الأصل والفائدة معاً ومجموع الفوائد ؟

الحل

ن = ٥ سنوات　　$ك_٢ = ٩٤٠.٢$　　$ك_٣ = ٩٩٦.٦$

ع = ؟　　ض = ؟　　ط = ؟　　مجـ ف = ؟

إيجاد المعدل

$$ع = \frac{ك_٣}{ك_٢} - ١$$

$$= \frac{٩٩٦٦}{٩٤٠٢} - ١ = ١,٠٦ - ١ = ٠,٠٦ \times ١٠٠ = \boxed{٦\%}$$

إيجاد القرض

$$ض = \boxed{ك_١} + ك_٢ + ك_٣ + \boxed{ك_٤} + \boxed{ك_٥}$$

إيجاد باقى الاستهلاكات $ك_١$ ، $ك_٤$ ، $ك_٥$

$\because \text{ك}_{٢} = \text{ك}_{١} \, (١ + \text{ع})$

$$\therefore \text{ك}_{١} = \frac{\text{ك}_{٢}}{١ + \text{ع}} = \frac{٩٤٠٢}{١,٠٦} = \boxed{٨٨٦٩,٨}$$

$$\text{ك}_{٤} = \text{ك}_{٣} \, (١ + \text{ع}) = ٩٩٦٦ \, (١,٠٦) = \boxed{١٠٥٦٤,١}$$

$$\text{ك}_{٥} = \text{ك}_{٤} \, (١ + \text{ع}) = ١٠٥٦٤,١ \, (١,٠٦) = \boxed{١١١٩٧,٩}$$

$$\therefore \text{ض} = \text{ك}_{١} + \text{ك}_{٢} + \text{ك}_{٣} + \text{ك}_{٤} + \text{ك}_{٥}$$

$$= ٨٨٦٩,٨ + ٩٤٠٢ + ٩٩٦٦ + ١٠٥٦٤,١ + ١١١٩٧,٩$$

$$= \boxed{٥٠٠٠٠} \text{ جنيه تقريباً}$$

إيجاد القسط المتساوى

$\text{ط} = \text{الاستهلاك الأخير} \, (١ + \text{ع}) = ١١١٩٧,٩ \, (١,٠٦) = \boxed{١١٨٦٩,٨}$

إيجاد مجموع الفوائد

$$\text{مجـ ف} = (\text{ط} \times \text{ن}) - \text{ض}$$

$$= (١١٨٦.٩٨ \times ٥) - ٥٠٠٠٠$$

$$= ٥٩٣٤٩ - ٥٠٠٠٠$$

$$= \boxed{٩٣٤٩} \text{ جنيه}$$

مثال

اشتري شخص شقة ثمنها ٢٥٠٠٠٠ جنيه دفع ٢٠% نقداً وتعهد بسداد الباقي علي ١٥ قسط سنوي متساوي بمعدل ٨%.

المطلوب: ١- القسط المتساوي ٢- مجموع الفوائد

الحل

$$\text{المبلغ المدفوع نقداً} = ٢٥٠٠٠٠ \times \frac{٢٠}{١٠٠} = ٥٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

$$\text{المبلغ المتبقي (القرض)} = ٢٥٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

$\text{ن} = ١٥ \qquad \text{ع} = ٨\%$

١ - القسط المتساوي:

$$\text{القسط المتساوى} = \text{القرض} \times \frac{\text{ع}}{١-(١+\text{ع})^{-\text{ن}}}$$

$$\text{القسط المتساوى} = ٢٠٠٠٠٠ \times \frac{٠,٠٨}{١-(١+٠,٠٨)^{-١٥}}$$

$$= \boxed{٢٣٣٦٥,٩٠٩}$$

٢- مجموع الفوائد:

مجموع الفوائد = ط × ن - ض

$$= (٢٣٣٦٥,٩٠٩ \times ١٥) - ٢٠٠٠٠٠$$

$$= \boxed{١٥٠٤٨٨,٦٣٥}$$

٢- استهلاك القروض

بطريقة

الاستهلاكات المتساوية

مبلغ الاستهلاك المتساوى عبارة عن مبلغ القرض مقسوماً على عدد سنوات الاستهلاك ، ويسدد المدين فى نهاية كل سنة مبلغ الاستهلاك (المتساوى) مضافاً إليه الفائدة على رصيد القرض المتبقى فى أول السنة

أى أن: القسط المدفوع آخر أى سنة

= الاستهلاك المتساوى + الفائدة

$$= \frac{\text{القرض}}{\text{عدد سنوات الاستهلاك}} + \text{رصيد القرض أول السنة} \times \text{ع} \times ١$$

الرموز:

ض ⟸ القرض

ك ⟸ الاستهلاك

ع ⟸ المعدل

ن ⟸ عدد الاستهلاكات (عدد السنوات)

مثال

اقترض أحد التجار من بنك مصر ٣٠٠٠٠ جنيه وتعهد بسدادها على خمس أقساط سنوية بطريقة (الاستهلاكات المتساوية) مع سداد الفوائد آخر كل سنة على الجزء المتبقى من القرض بمعدل ٦%.
المطلوب: تصوير جدول الاستهلاك

الحل

$$\text{الاستهلاك المتساوى} = \frac{\text{ض}}{\text{ن}} = \frac{٣٠٠٠٠}{٥} = ٦٠٠٠\text{ج}$$

<u>تصوير جدول الاستهلاك</u>

العمود (٤) + العمود (٥)   العمود (٢) × ع   العمود (٢) – العمود (٤)

السنة ١	رصيد القرض في أول السنة ٢	الأقساط ٣	الاستهلاكات المتساوية ٤	فائدة السنة ٥	رصيد القرض في آخر السنة ٦
١	٣٠٠٠٠	٧٨٠٠	٦٠٠٠	١٨٠٠	٢٤٠٠٠
٢	٢٤٠٠٠	٧٤٤٠	٦٠٠٠	١٤٤٠	١٨٠٠٠
٣	١٨٠٠٠	٧٠٨٠	٦٠٠٠	١٠٨٠	١٢٠٠٠
٤	١٢٠٠٠	٦٧٢٠	٦٠٠٠	٧٢٠	٦٠٠٠
٥	٦٠٠٠	٦٣٦٠	٦٠٠٠	٣٦٠	صفر

يتم سداد القرض (الأصل) في صورة عدد من الاستهلاكات المتساوية قيمة كل منها (ك) تدفع في نهاية كل سنة على أن يسدد مع كل استهلاك الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقى من القرض .

مثال

اقترض أحد التجار من بنك مصر ٥٠٠٠ جنيه وتعهد بسدادها على خمس أقساط سنوية بمعدل ١٠ % المطلوب تصوير جدول الاستهلاك بطريقة الاستهلاكات المتساوية (الأقساط المتساوية من الأصل فقط) .

الحل

$$\text{الاستهلاك المتساوى} = \frac{\text{ض}}{\text{ن}} = \frac{٥٠٠٠}{٥} = ١٠٠٠\text{ج}$$

جدول الاستهلاك

السنوات	رصيد أول السنة	الفائدة المستحقة	الاستهلاك المتساوى	القسط	رصيد آخر السنة
١	٥٠٠٠	٥٠٠	١٠٠٠	١٥٠٠	٤٠٠٠
٢	٤٠٠٠	٤٠٠	١٠٠٠	١٤٠٠	٣٠٠٠
٣	٣٠٠٠	٣٠٠	١٠٠٠	١٣٠٠	٢٠٠٠
٤	٢٠٠٠	٢٠٠	١٠٠٠	١٢٠٠	١٠٠٠
٥	١٠٠٠	١٠٠	١٠٠٠	١١٠٠	صفر

<u>كيف يملأ الجدول ؟</u>

١ـ نملأ خانة الاستهلاك المتساوي بأرقام مكررة في جميع السنوات.

٢ـ في السنة الأولي نضع القرض بالكامل في بداية السنة وللحصول علي القرض آخر السنة الأولي نطرح عمود (٢) – عمود (٤) أي طرح قرض السنة – استهلاك السنة الأولي.

٣ـ رصيد أول السنة الثانية = رصيد نهاية السنة الأولي.

٤ـ يتم حساب عمود الفائدة كالآتي: بضرب مبلغ القرض في السنة الأولي × معدل الفائدة المعطي ينتج فائدة السنة الأولي ولإيجاد فائدة السنة الثانية يتم ضرب مبلغ القرض في السنة الثانية × معدل الفائدة المعطي وهكذا أي أن عمود الفائدة رقم (٥) يتم إيجاده عن طريق ضرب عمود رقم (٢) × المعدل (ع)

٥- يتم ملأ عمود الأقساط رقم (٣) عن طريق جميع عمود رقم (٤) + عمود رقم (٥) أي جمع الاستهلاك + الفائدة ينتج القسط.

٣- استهلاك القروض

بطريقة

الاحتياطى المستثمر

فى هذه الحالة يتعهد المدين بدفع الفائدة على القرض أخر كل سنة على حسب سعر الفائدة المتفق عليه ويودع فى البنك سنوياً مبلغاً متساوياً أو دفعه مستثمرة بمعدل الفائدة السائد فى السوق تؤول جملتها فى نهاية مدة القرض إلى مبلغ القرض الذى يسدد إلى المدين .

وعلى ذلك فإن المدين يدفع مبلغين سنوياً هما :

١- الفائدة على القرض = القرض × معدل الفائدة على القرض × ١

٢- الدفعة المستثمرة = $\frac{\text{القرض} \times \text{ع}}{(\text{١}+\text{ع})^{\text{ن}} - \text{١}}$ بمعدل الاستثمار السائد فى السوق

٣ - المبلغ المدفوع آخر كل سنة = الفائدة على القرض + الدفعة المستثمرة

مثال

اقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيهاً بمعدل الفائدة ١٥% سنوياً يدفع آخر كل سنة واتفق مع الدائن على سداد مبلغ القرض فى نهاية ٥ سنوات المطلوب : إيجاد المبلغ الواجب دفعة آخر كل سنة سداداً للفائدة المستحقة ولتكوين احتياطى استهلاك القرض إذا كان معدل الاستثمار السائد فى السوق ١٢% سنوياً .

الحل

مبلغ القرض = ١٠٠٠٠

معدل الفائدة على القرض = ١٥ %

ن = ٥

الفائدة على القرض = القرض × معدل الفائدة على القرض × ١

الفائدة على القرض = ١٠٠٠٠ × $\frac{١٥}{١٠٠}$ × ١ = ١٥٠٠ جنيه

الدفعة المستثمرة = $\frac{\text{القرض} \times ع}{(١+ع)^{ن} - ١}$ بمعدل الاستثمار السائد فى السوق

الدفعة المستثمرة = $\frac{١٠٠٠٠ \times ٠,١٢}{(١+٠,١٢)^{٥} - ١}$

= ١٥٧٤,٠٩٧ جنيه

المبلغ المدفوع آخر كل سنة = الفائدة على القرض + الدفعة المستثمرة

= ١٥٠٠ + ١٥٧٤,٠٩٧

= $\boxed{٢٠٧٤,٠٩٧}$ جنيه

تمارين استهلاك القروض

(١) اقترض شخص مبلغ ما وتعهد بسداده على (٤) أقساط سنوية متساوية . فإذا علمت أن : الاستهلاك الثانى = ٢٢٨٩٥,٥١ جنيها الاستهلاك الثالث = ٢٦٥٥٨,٧٩ جنيهاً المطلوب :

١ ـ أحسب معدل الفائدة المركبة .

٢ ـ أحسب مبلغ القرض .

٣ ـ أحسب القسط المتساوى .

٤ ـ أحسب مجموع الفوائد التى تحملها المدين .

(٢) اقترض شخص مبلغ ما وتعهد بسداده على (٥) أقساط سنوية متساوية بمعدل الفائدة المركبة (١٠%) سنوياً . فإذا علمت أن علمت أن مجموع الاستهلاكين الأول والثانى هو (٦٨٧٩٤,٩٥) جنيهاً المطلوب :

١ ـ احسب مبلغ القرض . ٢ ـ احسب القسط المتساوى

٣ ـ احسب مجموع الفوائد التى تحملها المدين .

(٣) إذا كان الفرق بين الاستهلاكين الأول والثانى لقرض يسدد على (٣) أقساط سنوية متساوية بمعدل (١٢%) سنوياً هو (٨٨٩,٠٤٦) جنيهاً

المطلوب : ١ ـ احسب مبلغ القرض .

٢ ـ احسب القسط المتساوى .

٣ ـ احسب مجموع الفوائد .

(٤) قرض يستهلك على (٥) أقساط سنوية متساوية ، فاذا علمت أن الاستهلاك الأول يساوى ٣٢٧٥٩,٥ والاستهلاك الثالث يساوى ٣٩٦٣٨,٩٩ جنيهاً . المطلوب مبلغ القرض ، والقسط المتساوى

(٥) اقترضت شركة مبلغ ١٠٠٠ جنيه من بنك مصر لمدة ٤ سنوات وتعهدت بسداد القرض وفوائده بطريقة الأقساط المتساوية من الأصل والفائدة معاً بمعدل مركب ١١ % سنوياً والمطلوب :

١- حساب مقدار القسط المتساوى .

٢- تصوير جدول الاستهلاك .

٣- مجموع الفوائد التى تحملها المقترض .

(٦) إذا كان مجموع الاستهلاكين ٢ ، ٣ لقرض يسدد علي (٥) أقساط سنوية متساوية بمعدل ١٢% سنوياً هو ٧٤٧٥,٠٧٣ المطلوب: تصوير جدول الاستهلاك .

(٧) قرض يستهلك علي ٥ أقساط سنوية متساوية، فإذا علمت أن الاستهلاك الأول يساوي ٣٢٧٥,٩٥ والاستهلاك الثالث يساوي ٣٩٦٣,٨٩٩ جنيه المطلوب: ١ -إيجاد مبلغ القرض ٢ -إيجاد القسط المتساوي ٣- تصوير جدول الاستهلاك

(٨) اقترض شخص (١٠٠٠٠) جنيهاً وتعهد بسداده على (٥) أقساط سنوية من أصل القرض (بطريقة الاستهلاكات المتساوية) مع سداد الفوائد آخر كل سنة على الجزء المتبقى من القرض بمعدل الفائدة (١٦%) سنوياً المطلوب : ١- الاستهلاك المتساوى . ٢- تصوير جدول الاستهلاك .

(٩) اقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه وتعهد بسدادها علي أربع أقساط سنوية متساوية بمعدل الفائدة المركبة ١٦% سنوياً. المطلوب: احسب القسط المتساوي ، الاستهلاكات المختلفة ، أوجد مجموع الفوائد التي تحملها المدين، صور جدول الاستهلاك.

الفصل السادس

استهلاك قروض السندات

مقدمة

استهلاك السندات تعنى تنظيم سداد قروض السندات ويتم ذلك بعدة طرق منها :

١ ـ طريقة الاقساط المتساوية.

٢ ـ طريقة الاستهلاكات المستاوية.

٣ ـ طريقة الاحيتاط المستثمر.

ويعرض هذا المؤلف للطريقتين الأولى والثانية فقط.

أولاً : إستهلاك السندات بطريقة الاقساط المتساوية

وفقاً لهذه الطريقة تسدد الشركة المصدرة للسندات ما عليها من قيمة السندات والفوائد المستحقة على أقساط متساوية بحيث يكون كل قسط عبارة عن جزء من القرض وجزء من الفوائد، ولايجاد القسط المتساوى والاستهلاكات المختلفة ومجموع الفوائد تتبع الخطوات الآتية :

١ ـ القرض = عدد السندات × القيمة الاسمية للسند

٢ـ القسط المتساوى = القرض × $\frac{\text{ع}}{\text{١} - (\text{١}+\text{ع})^{-\text{ن}}}$

أو = الاستهلاك الأخير (١ + ع)

٣ـ <u>حساب الاستهلاك الأول</u>

الاستهلاك الأول = القسط المتساوى – فائدة القرض لمدة سنة

$\text{ك}_{\text{١}}$ = ط ـ القرض × ع × ١

٤ ـ باقي الاستهلاكات

الاستهلاك الثانى = $ك_٢ = ك_١ \ (١+ع)$

الاستهلاك الثانى = $ك_٣ = ك_٢ \ (١+ع)$ ...... وهكذا

٣ـ عدد السندات المستهلكة سنويا = $\frac{\text{مبلغ الاستهلاك}}{\text{القيمة الاسمية للسند}}$

ثم يقرب الناتج لاقرب رقم صحيح

مثال

أصدرت شركة ٥٠٠ سندا ، القيمة الاسمية للسند الواحد ١٠٠ جنيه وقررت إستهلاكها بطريقة الاقساط المتساوية من الأصل والفائدة معاً على ٥ سنوات بمعدل الفائدة المركبة ١٦% سنوياً، والمطلوب :

١ ـ حساب عدد السندات المستهلكة سنوياً .

٢ـ تصوير جدول الاستهلاك .

الحل

١ ـ القرض = عدد السندات × القيمة الاسمية للسند

= ٥٠٠ × ١٠٠ = ٥٠٠٠٠ جنيهاً

٢ـ القسط المتساوى = $٥٠٠٠٠ \times \frac{ع}{١ - (١+ع)^{-ن}}$

$= ٥٠٠٠٠ \times \frac{٠,١٦}{١ - (١,١٦)^{-٥}}$

$= ٥٠٠٠٠ \times ٠,٣٠٥٤٠٩٣٨$

= ١٥٢٧٠,٤٦٩ جنيه

٣ ـ الاستهلاك الأول = القسط المتساوى – فائدة القرض لمدة سنة

= ط – القرض × ع × ١

= ١٥٢٧٠,٤٦٩ – (٥٠٠٠٠ × $\frac{١٦}{١٠٠}$ × ١)

= ١٥٢٧٠,٤٦٩ – ٨٠٠٠ = ٧٢٧٠,٤٦٩ ج

<u>٤ـ باقى الاستهلاكات فى شكل نقدى</u>

الاستهلاك الثانى

ك$_{٢}$ = ك$_{١}$ (١+ع) = ٧٢٧٠,٤٦٩ (١,١٦) = ٨٤٣٣,٧٤٤ ج

الاستهلاك الثالث =

ك$_{٣}$ = ك$_{٢}$ (١+ع) = ٨٤٣٣,٧٤٤ (١,١٦) = ٩٧٨٣,١٤٣ ج

الاستهلاك الرابع =

ك$_{٤}$ = ك$_{٣}$ (١+ع) = ٩٧٨٣,١٤٣ (١,١٦) = ١١٣٤٨,٤٤٦ ج

الاستهلاك الخامس =

ك$_{٥}$ = ك$_{٤}$ (١+ع) = ١١٣٤٨,٤٤٦ (١,١٦) = ١٣١٦٤,١٩٧ ج

<u>تحويل الاستهلاكات النقدية إلى صورة سندات</u>

عدد السندات المستهلكة فى السنة الأولى

= ٧٢٧٠,٤٦٩ ÷ ١٠٠ = ٧٢,٣ = ٧٣ سند

عدد السندات المستهلكة فى السنة الثانية

= ٨٤٣٣,٧٤٤ ÷ ١٠٠ = ٨٤,٣ = ٨٤ سند

عدد السندات المستهلكة فى السنة الثالثة

= ٩٧٨٣,١٤٣ ÷ ١٠٠ = ٩٧,٨٣ = ٩٨ سند

عدد السندات المستهلكة فى السنة الرابعة

= ١١٣٤٨,٤٤٦ ÷ ١٠٠ =١١٣,٤ = ١١٣ سند

عدد السندات المستهلكة فى السنة الخامسة

= ١٣١٦٤,١٩٧ ÷ ١٠٠ = ١٣١,٦ = ١٣٢ سند

المجموع ٥٠٠ سند

٥ ـ جدول الاستهلاكات

السنة	عدد السنوات المتداولة	عدد السنوات المستهلكة	مبلغ الاستهلاك	الفائدة	القسط المدفوع أخر السنة
١	٥٠٠	٧٣	٧٣٠٠٠	٨٠٠٠	١٥٣٠٠
٢	٤٢٧	٨٤	٨٤٠٠	٦٨٣٢	١٥٢٣٢
٣	٣٤٣	٩٨	٩٨٠٠	٥٤٨٨	١٥٢٨٨
٤	٢٤٥	١١٣	١١٣٠٠	٣٩٢٠	١٥٢٢٠
٥	١٣٢	١٣٢	١٣٢٠٠	٢١١٢	١٥٣١٢
اجمالى		٥٠٠	٥٠٠٠٠	٢٦٣٥٢	٧٦٣٥٢

ملاحظات :

١ـ عدد السندات المتداولة فى أول السنة الأولى

= السندات كلها = ٥٠٠ سند

٢ـ عدد السندات المستهلكة تنقل من االتمرين

٣ـ عدد السندات المتداولة فى السنة الثانية

= المتداولة فى السنة الأولى ـ المستهلكة

= ٥٠٠ ـ ٧٣ = ٤٢٧

٤ - عدد السندات المتداولة فى السنة الثالثة = ٤٢٧ – ٨٤ = ٣٤٣

٥- مبلغ الاستهلاك = عدد السندات المستهلكة × القيمة الاسمية للسند

مثلاً:

مبلغ الاستهلاك فى السنة الأولى = ٧٣ × ١٠٠ = ٧٣٠٠ ج

مبلغ الاستهلاك فى السنة الثانية = ٨٤ × ١٠٠ = ٨٤٠٠ ج

...... وهكذا

٦- الفائدة = عدد السندات المتداولة × القيمة الاسمية للسند × ع × ١

فمثلاً ف١ = ٥٠٠ × ١٠٠ × $\frac{١٦}{١٠٠}$ × ١ = ٨٠٠٠ جنيه

ف٢ = ٤٢٧ × ١٠٠ × $\frac{١٦}{١٠٠}$ × ١ = ٦٨٣٢ جنيه

...... وهكذا

٧- القسط المدفوع آخر السنة = مبلغ الاستهلاك + الفائدة

فى آخر السنة الأولى = ٧٣٠٠ + ٨٠٠٠ = ١٥٣٠٠ ج

فى آخر السنة الثانية = ٧٣٠٠ + ٨٠٠٠ = ١٥٣٠٠ ج

مثال

أصدرت شركة قرضاً يستهلك خلال ٣ سنوات بمعدل فائدة المركبة ١٣% سنويا ، فاذا علمت أن قيمة السندات المستهلكة فى آخر السنة الثانية ٣٣١٦٧,٩٨٣٦ جنيها وأن القيمة الاسمية للسند الواحد ١٠٠ جنيها ، ما هو القرض الاصلى مع تصوير جدول الاستهلاك بطريقة الاقساط المتساوية .

الحل

عدد الاقساط (ن) = ٣

المعدل (ع) = ١٣%

قيمة السندات المستهلكة أخر السنة الثانية

= الاستهلاك الثانى = ك$_{٢}$

= ٣٣١٦٧,٩٨٣ ج

<u>إيجاد باقى الاستهلاكات</u>

ك$_{٢}$ = ك$_{١}$ (١ +ع)

٣٣١٦٧,٩٨٣ = ك$_{١}$ (١,١٣)

∴ ك$_{١}$ = $\frac{٣٣١٦٧,٩٨٣}{١,١٣}$ = ٢٩٣٥٢,١٩٧ ج

ك$_{٣}$ = ك$_{٢}$ (١ + ع)

= ٣٣١٦٧,٩٨٣(١,١٣) = ٣٧٤٧٩,٨٢٠٧٩ ج

القرض = مجموع الاستهلاكات

= ك$_{١}$ + ك$_{٢}$ + ك$_{٣}$ = ١٠٠٠٠٠ **جنيهاً**

عدد السندات = $\frac{\text{القرض}}{\text{القيمة الاسمية للسند}}$ = $\frac{١٠٠٠٠٠}{١٠٠}$ = ١٠٠٠ سند

<u>عدد السندات المستهلكة سنويا</u>

= مبلغ الاستهلاك ÷ القيمة الاسمية للسند

إذن عدد السندات المستهلكة فى السنة اللأولى

= ٢٩٣٥٢,١٩٧ ÷ ١٠٠ = ٢٩٣,٥ = ٢٩٣ سندا

عدد السندات المستهلكة فى السنة الثانية

= ٣٣١٦٧,٩٨٣ ÷ ١٠٠ = ٣٣١,٦ = ٣٣٢ سندا

عدد السندات المستهلكة فى السنة الثالثة

= ٣٧٤٧٩,٨٢٠٧٩ ÷ ١٠٠ = ٣٧٤,٧ = ٣٧٥ سندا

جدول الاستهلاك

السنة	عدد السندات		المبالغ المدفوعة		
	المتداولة	المستهلكة	مبلغ الاستهلاك	الفائدة	القسط المدفوع
١	١٠٠٠	٢٩٣	٢٩٣٠٠	١٣٠٠٠	٤٢٣٠٠
٢	٧٠٧	٣٣٢	٣٣٢٠٠	٩١٩١	٤٢٣٩١
٣	٣٧٥	٣٧٥	٣٧٥٠٠	٤٨٧٥	٤٢٣٧٥
اجمالى		١٠٠٠	١٠٠٠٠٠	٢٧٠٦٦	١٢٧٠٦٦

ثانياً : إستهلاك السندات بطريقة الاستهلاكات المتساوية

(باعداد متساوية)

$$\text{عدد السندات المستهلكة سنويا} = \frac{\text{عدد السندات كلها}}{\text{عدد سنوات الاستهلاك}}$$

مثال

أصدرت شركة ١٥٠٠ سنداً القيمة الاسمية للسند الواحد ١٠٠ جنيه وقررت استهلاكها على ٥ سنوات باعداد متساوية بمعدل الفائدة المركبة ١٦% سنويا والمطلوب تصوير جدول الاستهلاك .

الحل

$$\text{عدد السندات المستهلكة سنويا} = \frac{\text{عدد السندات كلها}}{\text{عدد سنوات الاستهلاك}}$$

عدد السندات المستهلكة سنويا = ١٥٠٠ ÷ ٥ = ٣٠٠ سند

جدول الاستهلاكات

السنة	عدد السندات		مبلغ الاستهلاك	الفائدة	القسط المدفوع
	المتداولة	المستهلكة			
١	١٥٠٠	٣٠٠	٣٠٠٠٠٠	٢٤٠٠٠٠	٥٤٠٠٠٠
٢	١٢٠٠	٣٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٩٢٠٠٠	٤٩٢٠٠٠
٣	٩٠٠	٣٠٠	٣٠٠٠٠٠	١٤٤٠٠٠	٤٤٤٠٠٠
٤	٦٠٠	٣٠٠	٣٠٠٠٠٠	٩٦٠٠٠	٣٩٦٠٠٠
٥	٣٠٠	٣٠٠	٣٠٠٠٠٠	٤٨٠٠٠	٣٤٨٠٠٠
الاجمالى			١٥٠٠٠٠٠	٧٢٠٠٠٠	٢٢٢٠٠٠٠

١- هذا الجدول يشبه الجدول السابق تماماً فى طريقة عمله

٢- مجموع الفوائد

$$= \frac{\text{عدد الفوائد}}{٢} [\text{ الفائدة الأولى + الفائدة الأخيرة }]$$

$$= \frac{٥}{٢} [٢٤٠٠٠٠ + ٤٨٠٠٠]$$

= ٧٢٠٠٠٠ جنيه

البـــــاب الثـــــالث

الاحتمـالات و التـأمين

الفصل الأول

مقدمة فى الإحتمالات

الإحتمال

هو مقياس رقمى لإمكانية حدوث شئ معين فى المستقبل، وتتحدد قيمة الإحتمال فى ضوء تحديد ثلاث عناصر رئيسية وهى:

١) التجربة العشوائية.

٢) فراغ العينة.

٣) الحدث.

التجربة العشوائية

هى نشاط معين يكون من المعروف مقدماً النتائج الكلية الممكن الحصول عليها منه، إن أى نشاط يحقق نتائج يسمى بالتجربة، ففى تجربة استقصاء (استطلاع رأى) تقوم به إحدى شركات التأمين لدراسة مدى رضاء العملاء عن الخدمة التأمينية المقدمة بواسطة الشركة، إختارت الشركة عينة عشوائية من المؤمن لهم طرف الشركة وكان السؤال : ما هو مدى رضائك عن الخدمة التأمينية المقدمة بواسطة الشركة ؟ فى هذه الحالة تكون النواتج الممكنة (إجابات أشخاص العينة) كالآتى :

* راضى .

* غير راضى .

* ليس لى رأى .

إن الاهتمام هنا يكون بجميع النواتج الممكنه بشرط محدد وهو ألا يحدث ناتجين فى نفس الوقت فلا يمكن أن يجيب شخص على السؤال بإجابتين (راضى وغير راضى مثلاً فى نفس الوقت) .

فراغ العينة

إن جميع النواتج الممكنة للتجربة تسمى فراغ العينة.

الحدث

هو مجموعة جزئية من فراغ العينة، إن أى ناتج أو بعض النواتج الممكنة فى فراغ العينة يسمى بالحدث، ففى التجربة السابقة تكون لدينا الأحداث التالية :

الحدث (راضى) - الحدث (غير راضى) - الحدث (ليس لى رأى)

الاحتمال لحدث معين

نبحث الأن فى فرصة حدوث حدث معين عند إجراء التجربة فمثلاً فى تجربة استطلاع الرأى عن مدى رضاء العملاء عن الخدمة التأمينية المقدمة بواسطة الشركة نفترض سحب عينة من ١٠٠٠ شخص من المؤمن لهم وسؤالهم عن رأيهم فى الاشتراك فى هذا النوع من وثائق التأمين فكانت النتائج كالآتى :

الرأى	العدد	النسبة
راضى	٧٠٠	
غير راضى	٢٠٠	
ليس له رأى	١٠٠	
المجموع	١٠٠٠	١

إنه بتكرار التجربة ١٠٠٠ مرة كانت نسبة الرضا عن الخدمة التأمينية ٧٠% ونسبة عدم الرضا ٢٠% ونسبة من لا رأى لهم ١٠% . إن هذه النسب الناتجة من تكرار التجربة تعبر عن الاحتمالات الخاصة بالتجربة فيكون :

احتمال حدوث الحدث (أ)

$$ح\ (أ) = ٠,٧٠$$

احتمال حدوث الحدث (ب)

$$ح\ (ب) = ٠,٢٠$$

احتمال حدوث الحدث (جـ)

$$ح\ (جـ) = ٠,١٠$$

فيكون للاحتمال التعريف التالى :

للحدث (أ) إذا كان عدد مرات حدوثه (ن) عند تكرار التجربة (ك) من المرات فإن الاحتمال يعبر عن التكرار النسبى لعدد مرات حدوث ذلك الحدث أى أن :

$$ح\ (أ) = \frac{ن}{ك}$$

ويتميز الاحتمال بالخصائص الرياضية التالية :

<u>أولاً :</u> إن قيمة الاحتمال تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح :

$$صفر \leq ح\ (أ) \leq ١$$

أى أنه لا يوجد احتمال سالب أو أكبر من الواحد الصحيح .

<u>ثانيا :</u> أن مجموع جميع الاحتمالات الخاصة بتجربة معينة (أى مجموع الاحتمالات الخاصة بجميع الأحداث فى فراغ العينة) تساوى الواحد الصحيح .

أى أن :

$$مجـ\ ح_{ر} = ح_{١} + ح_{٢} + \cdots\cdots + ح_{م} = ١$$

ويمكن التحقق من تلك الخاصية فى تجربة استصلاع الرأى بشأن وثائق التأمين الجديدة حيث نجد أن :

$$\text{مجـ}\ \text{ح}_{ر} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٣}$$

= ٠,٧٠ + ٠,٢٠ + ٠,١٠

= ١

الأحداث المركبة

ناقشنا فيما سبق حساب الاحتمالات للأحداث الثلاثة : الرضا عن الخدمة التأمينية المقدمة، عدم الرضا عن الخدمة التأمينية المقدمة، ليس له رأى فى الخدمة التأمينية المقدمة . وهى كلها أحداث مفردة حيث تم حساب الاحتمال لكل منها على حده ويسمى هذا بحساب الاحتمال للأحداث البسيطة .

وإذا قمنا بحساب الاحتمالات لأكثر من حدث مرة واحدة فإن ذلك يسمى بحساب الاحتمال للأحداث المركبة . ونناقش ذلك فيما يلى :

إذا كان لدينا الأحداث التالية :

الحدث (أ) وهو أن الشخص يفضل الاشتراك فى التأمين مدى الحياه، و الحدث (ب) وهو أن الشخص يفضل الاشتراك فى التأمين محدد المدة .

فإن :

الحدث (أ أو ب) معناه أن الشخص إما أن يشترك فى التأمين مدى الحياة أو التأمين محدد المدة أو كليهما وبذلك فإن هذا الحدث يتكون من النواتج فى (أ) أو النواتج فى (ب) أو كليهما ويسمى هذا باتحاد الحدثين (أ) مع (ب) .

كذلك فإن :

الحدث (أ و ب) معناه أن الشخص يشترك فى التأمين مدى الحياة والتأمين محدد المدة معا فى نفس الوقت . أى أن هذا الحدث يتكون من النواتج فى (أ) والنواتج فى (ب) معا وفى نفس الوقت أى النواتج المشتركة فى كلا الحدثين ويسمى هذا بتقاطع الحدث (أ) والحدث (ب) .

إن (أ أو ب) وكذلك (أ و ب) يعبران عن الأحداث المركبة

الأحداث المانعة بالتبادل

هى الأحداث التى لا تحدث معا ولا يمكن تصور حدوثها معا فى نفس الوقت .

فإن كان الحدث (أ) أن الشخص قام بالتأمين على شركته ضد خطر السرقة، والحدث (ب) أن خطر السرقة قد تحقق، والحدث (جـ) أن خطر السرقة لم يتحقق والحدث (د) أن الشخص قد حصل على قيمة التأمين نجد أن الحدثين (ب ، د) يمكن حدوثهما معا بمعنى أن خطر السرقة قد تحقق وحصل الشخص على قيمة التأمين.

ولكن الحدثيين (جـ ، د) لا يمكن حدوثهما معا بمعنى أن خطر السرقة لم يتحقق وحصل الشخص على قيمة التأمين فهذا غير معقول لأنه لن يحصل على قيمة التأمين إلا إذا تحقق خطر السرقة لذلك يمكن القول بأن الحدثين (جـ ، د) مانعان بالتبادل .

أى أنه للأحداث المانعة بالتبادل مثل الحدثين (جـ ، د) نجد أن :

احتمال حدوثهما معا يساوى الصفر وبذلك يكون :

ح (جـ و د) = صفر

قاعدة الجمع فى الاحتمالات

إذا كان لدينا الحدث (أ) والحدث (ب) فإن :

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ و ب)

وفى حالة الأحداث المانعة بالتبادل حيث :

$$\boxed{\text{ح (أ و ب) = صفر}}$$

فإن :

ح (أ أو ب) = ح (أ) + ح (ب)

الأحداث المكملة

إذا كان الحدث (أ) هو الاشتراك فى نوع معين من وثائق التأمين فإن الحدث المكمل له (~ أ) هو عدم الاشتراك فى هذا النوع من وثائق التأمين لذلك فإن الحدث (~ أ) يحدث عندما لايحدث الحدث (أ) يحدث عندما لايحدث الحدث (أ) . وتكون قاعدة الأحداث المكملة كالآتى :

ح (أ) + ح (~ أ) = ١

فإذا كان احتمال الاشتراك فى نوع معين من وثائق التأمين هو ٠,٦٠ فإن احتمال عدم الاشتراك فى هذا النوع من الوثائق يكون :

ح (أ) = ١ - ح (أ)

= ١ - ٠,٦٠ = ٠,٤٠

حالة تطبيقية

أجريت تجربة على عينة عشوائية من ١٠٠٠٠ شخص لدراسة تفضيلاتهم لنوعين من تأمينات الحياة (النوع أ ، النوع ب) فى شركتين للتأمين (شركة س ، شركة ص) فكانت النتائج التالية :

	س	ص	المجموع
أ	٤٥٠٠	١٠٠٠	٥٥٠٠
ب	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٤٥٠٠
المجموع	٦٥٠٠	٣٥٠٠	١٠٠٠٠

من البيانات المتاحة يمكن حساب الاحتمالات للأحداث البسيطة التالية :

(١) احتمال وجود شخص يفضل نوع التأمين (أ)

$$ح\ (أ) = \frac{\text{عدد الذين يفضلون نوع التأمين (أ)}}{\text{حجم العينة}}$$

$$= \frac{٥٥٠٠}{١٠٠٠٠}$$

$$= ٠,٥٥$$

(٢) احتمال وجود شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س)

$$ح\ (س) = \frac{\text{عدد الذين يفضلون التعامل مع (س)}}{\text{حجم العينة}}$$

$$= \frac{٦٥٠٠}{١٠٠٠٠}$$

$$= ٠,٦٥$$

كما يمكن حساب الاحتمال للأحداث المكملة التالية :

(٣) احتمال عدم وجود شخص يفضل نوع التأمين (أ)

$$ح\ (\sim أ) = ١ - ح\ (أ)$$

$$= ١ - ٠,٥٥ = ٠,٤٥$$

(٤) احتمال عدم وجود شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س)

$$ح\ (\sim س) = ١ - ح\ (س)$$

$$= ١ - ٠,٦٥ = ٠,٣٥$$

<u>أيضاً فإنه يمكن حساب الاحتمالات للأحداث المركبة التالية:</u>

(٥) احتمال وجود شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س) أو يفضل نوع التأمين (ب) أى

ح (س أو ب)

الحل

بتطبيق قاعدة جمع الاحتمالات يكون :

ح (س أو ب) = ح (س) + ح (ب) - ح (س و ب)

$$\frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠}$$

= ٠,٦٥ + ٠,٤٥ — ٠,٢

= $\boxed{٠,٩}$

ملحوظة : إن العدد (٢٠٠٠) تم احتسابه ضمن الاحتمال (س) وكذلك ضمن الاحتمال (ب) لذلك يتم طرحه لعدم حدوث ازدواج فى الحساب وهى قاعدة جمع الاحتمالات للأحداث المشتركة .

(٦) احتمال وجود شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س) أو مع شركة التأمين (ص) أى ح (س أو ص)

الحل

بتطبيق قاعدة جمع الاحتمالات يكون :

ح (س أو ص) = ح (س) + ح (ص) - ح (س و ص)

صفر

= ٠,٦٥ + ٠,٣٥

= $\boxed{١}$

ملحوظة: ح (س و ص) وهو يعبر عن عدد الذين يفضلون التعامل مع شركة التأمين (س) وفى نفس الوقت يفضلون التعامل مع شركة التأمين (ص) وهذا غير ممكن أى أن الحدث (س و ص) غير موجود لذلك فإن:
ح (س و ص) = صفر يعبر عن أحداث متنافية بالتبادل .

قاعدة الضرب فى الاحتمالات

رأينا أن الاحتمال ح (س و ب) والذى يعنى وجود شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س) وفى نفس الوقت يفضل نوع التأمين (ب) أى تقاطع الحدثين س و ب وقد تم حساب هذا الاحتمال بسهولة لتوافر جميع البيانات الخاصة بالأحداث الأربعة : أ ، ب ، س ، ص وكذلك تقاطعات تلك الأحداث (س و أ) ، (س و ب) ، (ص و أ) ، (ص و ب) ولكن فى بعض الأحيان قد لا يكون ذلك متوافراً .

ونناقش الآن كيفية الحصول على هذا الاحتمال باستخدام بيانات معينة .

إذا كان لدينا الحدث :

"شخص يفضل التعامل مع شركة التأمين (س) علما بأنه يفضل نوع التأمين (أ) " يسمى هذا بالحدث الشرطى ويكتب كالآتى :

ح (س/أ) وتقرأ احتمال حدوث الحدث (س) بمعلومية الحدث (أ) .

ولحساب هذا الاحتمال نجد أن :

عدد الأشخاص الذين يفضلون التعامل مع شركة التأمين (س) = ٦٥٠٠ شخص منهم ٤٥٠٠ شخص يفضلون التأمين مدى الحياه (أ) والذى يعبر عنه الاحتمال : ح (س و أ) فيكون الاحتمال المطلوب مساوياً للقيمة

أى أن :

ومن هذه العلاقة يمكننا استنتاج قاعدة الضرب فى الاحتمالات :

للحدثين (س) و (أ) يكون :

ح (س و أ) = ح (أ) × ح (س/أ)

حيث :

ح (أ) ⟵ الاحتمال البسيط للحدث (أ)

ح (أ و س) ⟵ الاحتمال المشترك للحدثين (أ) و (س)

ح (س / أ) ⟵ الاحتمال الشرطى (س بمعلومية أ)

الأحداث المستقلة

تعرف الأحداث المستقلة بأن : الحدث (أ) والحدث (ب) مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لايؤثر على احتمال حدوث الآخر . لذلك فإنه فى حالة الأحداث المستقلة يكون :

ح (أ / ب) = ح (أ)

وبالتعويض بالناتج فى قاعدة الضرب نجد أن :

ح (أ و ب) = ح (أ) × ح (ب / أ)

= ح (أ) × ح (ب)

ويسمى الناتج بقاعدة الأحداث المستقلة .

ويلاحظ أنه يمكن تعميم قاعدة الأحداث المستقلة لأى عدد من تلك الأحداث .

فإذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أحداثاً مستقلة فإن :

ح (أ و ب و جـ و د) = ح(أ) × ح(ب) × ح(جـ) × ح(د)

القيمة المتوقعة

تتحدد القيمة المتوقعة على أساس مفهوم المتغير العشوائى وذلك على النحو التالى:

المتغير العشوائى

يمكن توضيح مفهوم المتغير العشوائى من خلال التجربة التالية :

فى استطلاع رأى لعينة عشوائية مكونة من شخصين (س ، ص) كان المطلوب الإجابة عن السؤال الآتى :

ما هو مدى رضائك عن الخدمة التأمينية المقدمة لك بواسطة الشركة ؟

إننا نتوقع الحصول على إجابة واحدة فقط من بين الحالات الممكنة للإجابة والتى تكون فراغ العينة للتجربة وهى :

جدول رقم ( ) فراغ العينة لتجربة استطلاع الرأى عن مدى الرضا عن الخدمة التأمينية المقدمة بواسطة أحدى شركات التأمين

الشخص / حالات الإجابة	س	ص
حالة (١)	نعم	نعم
حالة (٢)	نعم	لا
حالة (٣)	لا	نعم
حالة (٤)	لا	لا

فإذا تم حصر عدد مرات الإجابة (بنعم) سوف نجد أن جميع القيم الممكنة للإجابة بنعم هى (٢ ، ١ ، ١ ، صفر) للحالات الأربعة السابقة. أى أننا قمنا بتخصيص عدد معين لكل عنصر فراغ العينة فى

مقابل الخاصية العددية " عدد حالات الإجابة بنعم " وتسمى هذه الخاصية بالمتغير العشوائى .

لذلك فإنه يمكن تعريف المتغير العشوائى بأنه :

" القاعدة التى تمكننا من تخصيص رقم معين لكل عنصر فى فراغ العينة لتجربة معينة "

وتعبر قيم التخصيص والتى تمثلها هنا الأرقام (٢ ، ١ ، ١ ، صفر) عن قيم المتغير العشوائى

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى

لفهم معنى القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى يمكن تتبع التحليل التالى:

تقوم أحدى شركات التأمين على الحياة بتشجيع المؤمن لهم على شراء المزيد من وثائق تأمينات الحياة وتقوم بعمل سحب دورى ذو جوائز على بعض أرقام وثائق تأمينات الحياة، وقد أجريت دراسة على عينة عشوائية من مائتين شخص من المشتركين فى وثائق تأمينات الحياة لدى هذه الشركة وتم سؤال أفراد العينة عن عدد المرات التى فازوا فيها بجوائز فى السحب الدورى على وثائق تأمينات الحياة:

جدول رقم ( ) عدد مرات الفوز بالجوئز فى السحب الدورى

عدد مرات الفوز	عدد الأشخاص
٠	٦٠
١	٢٠
٢	٢٠
٣	٦٠
٤	٤٠
المجموع	٢٠٠

ومن التعريف السابق للاحتمال نجد أن نسب الفوز التالية:

$$\frac{٦٠}{٢٠٠} ، \frac{٢٠}{٢٠٠} ، \frac{٢٠}{٢٠٠} ، \frac{٦٠}{٢٠٠} ، \frac{٤٠}{٢٠٠}$$

واختصاراً

٠,٣ ، ٠,١ ، ٠,١ ، ٠,٣ ، ٠,٢

ما هى إلا احتمالات الفوز بالجوائز فى السحب الدورى.

ويسمى الجدول التالى الذى يتكون من خانتين الخانة الأولى تشمل على جميع القيم الممكنة (س) للمتغير العشوائى (ويمثلها عدد مرات الفوز بجائزة فى السحب الدورى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٤) ، والخانة الثانية بها الاحتمال (ح س) المقابل لكل قيمة (ويمثلها نسب الفوزبالجوائز فى السحب الدورى ٠,٣ ، ٠,١ ، ٠,١ ، ٠,٣ ، ٠,٢) باسم **التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى**

جدول رقم ( ) التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى (س)

س	ح س
٠	٠,٣
١	٠,١
٢	٠,١
٣	٠,٣
٤	٠,٢
المجموع	١

ويمكن من التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى (س) حساب متوسط عدد مرات الفوز بجائزة فى السحب الدورى على الوثائق والذى يعرف أيضاً باسم القيمة المتوقعة لعدد مرات الفوز وهى عبارة عن مجموع حواصل ضرب قيم المتغير العشوائى (س) فى الاحتمال المقابل لكل قيمة (ح س) أى من خلال العلاقة التالية:

$$ق_م (س) = مجـ (س \times ح_س)$$

حيث : $ق_م$ (س) تمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى (س)

أى أن $ق_م$ (س)

$$= \cdot \times ٠,٣٠ + ١ \times ٠,١ + ٢ \times ٠,١ + ٣ \times ٠,٣ + ٤ \times ٠,٢$$

$$= \cdot + ٠,١ + ٠,٢ + ٠,٩ + ٠,٨$$

$$= \boxed{٢}$$

ويلاحظ على القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى (س) أنها تعطى المتوسط الحسابى المرجح لعدد مرات الفوز بجائزة فى السحب الدورى على الوثائق ويمكن أثبات ذلك كما يلى:

$$\text{الوسط الحسابى المرجح} = \frac{\text{مجـ س×و}}{\text{مجـ و}}$$

حيث:

س : عدد مرات الفوز بجائزة فى السحب الدورى على الوثائق

و : الأوزان الترجيحية وهى تمثل عدد الأشخاص المقابل

الوسط =

$$+ ٤ \times ٤٠$$

$$\text{الوسط} = \frac{١٦٠+١٨٠+٤٠+٢٠+٠}{٢٠٠}$$

$$\text{الوسط} = \frac{٤٠٠}{٢٠٠}$$

$$= \boxed{٢}$$

حساب احتمالات الحياة والوفاة

تستخدم قاعدة الأحداث المستقلة فى حساب احتمالات الحياة والوفاة والتى

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د أحداثاً مستقلة فإن :

ح (أ و ب و جـ و د) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ) × ح (د)

أن حدث الحياة والوفاة لشخصين يعتبرا من الأحداث المستقلة ونقصد بهذا المصطلح أن وقوع حدوث أحد الحدثين لا يمنع ولا يؤثر في وقوع حدوث الحدث الأخر، فمن المنطقي أن حدث الحياة أو الوفاة لشخص ما لا يمنع ولا يؤثر علي حدث الحياة أو الوفاة لشخص آخر، لذا يعتبرا من الأحداث المستقلة وينطبق عليهما قاعدة ضرب الاحتمالات.

إذا كان احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٩ واحتمال حياة شخص(ب) = ٠,٨ فإنه لإيجاد احتمال حياتهما معاً فهذا يعني أننا نريد احتمال حياة الشخص (أ) وفي نفس الوقت حياة الشخص (ب) وهما كما ذكرنا أحداث مستقلة فيمكن إيجاد قيمة هذا الاحتمال بضرب الاحتمالين =٠,٩ × ٠,٨ =٠,٧٢

مثال

إذا كان احتمال وفاة شخص معين (أ ١) = ٠,٢٠ وكان احتمال وفاة شخص آخر من نفس الأسرة (أ ٢) = ٠,٣٠

المطلوب:

أولاً : احتمال وفاة أ ١ ، أ ٢

ثانياً : احتمال وفاة أ ١ وحياة أ ٢

ثالثاً : احتمال حياة أ ١ ووفاة أ ٢

رابعاً : احتمال حياة أحدهما فقط

الحل

الشخص \ الاحتمال	الوفاة	الحياة
$أ_1$	٠,٢	٠,٨
$أ_2$	٠,٣	٠,٧

أولاً : احتمال وفاة $أ_1$ ، $أ_2$

ح = احتمال وفاة $أ_1$ × احتمال وفاة $أ_2$

= ٠,٢ × ٠,٣

= $\boxed{٠,٦}$

ثانياً : احتمال وفاة $أ_1$ وحياة $أ_2$

ح = احتمال وفاة $أ_1$ × احتمال حياة $أ_2$

= ٠,٢ × ٠,٧

= $\boxed{٠,١٤}$

ثالثاً : احتمال حياة $أ_1$ ووفاة $أ_2$

ح = احتمال حياة $أ_1$ × احتمال وفاة $أ_2$

= ٠,٨ × ٠,٣

= $\boxed{٠,٢٤}$

رابعاً : احتمال حياة أحدهما فقط

= **احتمال حياة أ$_{1}$ × احتمال وفاة أ$_{2}$**

+ **احتمال وفاة أ$_{1}$ × احتمال حياة أ$_{2}$**

= (٠,٨ × ٠,٣) + (٠,٢ × ٠,٧)

= ٠,٢٤ + ٠,١٤

= $\boxed{٠,٣٨}$

مثال

إذا كانت النتائج الآتية لاحتمالات الوفاة لشخصين (أ ، ب) فى فئة العمر من ٥٠ سنة إلى أقل من ٥١ سنة:

- احتمال الوفاة للشخص أ = ٠,٣
- احتمال الوفاة للشخص ب = ٠,٤

احسب احتمال حياة أحدهما على الأقل ؟

الحل

الشخص / الاحتمال	الوفاة	الحياة
أ	٠,٣	٠,٧
ب	٠,٤	٠,٦

احتمال حياة أحدهما على الأقل = احتمال حياة أ ووفاة ب + احتمال حياة ب ووفاة أ + احتمال حياة أ و ب

= ٠,٧ × ٠,٤ + ٠,٦ × ٠,٣ + ٠,٧ × ٠,٦

= ٠,٢٨ + ٠,١٨ + ٠,٤٢ = $\boxed{٠,٨٨}$

حل آخر

حيث أن مجموع احتمالات اى تجربة = ١ فيمكن استكمال الاحتمالات الثلاثة السابقة (احتمال حياة أ ووفاة ب ، احتمال حياة ب ووفاة أ ، احتمال حياة أ و ب) بالاحتمال الرابع الباقى (احتمال وفاة أ ، ب) وذلك على النحو التالى:

احتمال حياة أحدهما على الأقل = ١ – احتمال وفاة أ ، ب

= ١ – (٠,٣ × ٠,٤)

= ١ – ٠,١٢

= $\boxed{٠,٨٨}$

مثال:

إذا كان احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٨٩ وأيضاً وجدنا أن احتمال حياة شخص (ب) = ٠,٧٠ أوجد

أ- احتمال حياتهما معاً.
ب- احتمال وفاتهما معاً.
ت- احتمال حياة (أ) و وفاة (ب).
ث- احتمال وفاة (أ) و حياة (ب).
ج- احتمال حياة أحدهما فقط.
ح- احتمال حياة أحدهما علي الأقل.

الحل

في البداية يمكن تلخيص التمرين كمايلي

	احتمال الحياة	احتمال الوفاة = ١ - احتمال الحياة
الشخص (أ)	٠,٨٩	١ – ٠,٨٩ = ٠,١١
الشخص (ب)	٠,٧٠	١ – ٠,٧٠ = ٠,٣٠

أ- احتمال حياتهما معاً

تعني احتمال حياة الشخص (أ) و حياة الشخص (ب) ويمكن حسابها كمايلي = ٠,٨٩ × ٠,٧٠ = $\boxed{٠,٦٢٣}$

ب- احتمال وفاتهما معاً

تعني احتمال وفاة الشخص (أ) و وفاة الشخص (ب) ويمكن حسابها كمايلي =٠,١١ × ٠,٣٠ = $\boxed{٠,٠٣٣}$

ت- احتمال حياة (أ) و وفاة (ب)

تعني احتمال حياة الشخص (أ) و وفاة الشخص (ب) ويمكن حسابها كمايلي = ٠,٨٩ × ٠,٣٠ = $\boxed{٠,٢٦٧}$

ث- احتمال وفاة (أ) و حياة (ب)

يمكن حسابها كمايلي = ٠,١١ × ٠,٧٠ = $\boxed{٠,٠٧٧}$

ج- احتمال حياة أحدهما فقط

تعني احتمال حياة (أ) و وفاة (ب) أو وفاة (أ) و حياة (ب)

= ٠,٨٩ × ٠,٣٠ + ٠,١١ × ٠,٧٠ = $\boxed{٠,٣٤٤}$

ح- احتمال حياة أحدهما علي الأقل تعني احتمال حياة (أ) و وفاة (ب) أو وفاة (أ) و حياة (ب) أو حياة (أ) و حياة (ب)

= ٠,٨٩ × ٠,٣٠ +٠,١١ × ٠,٧٠ + ٠,٨٩ × ٠,٧٠ = $\boxed{٠,٩٦٧}$

مثال:

إذا كان احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٩٠ واحتمال حياة شخص (ب) = ٠,٨٠ واحتمال حياة شخص (ج) = ٠,٧٥

أوجد :

أ - احتمال وفاة الثلاث أشخاص معاً.

ب – احتمال حياة شخصين فقط.

الحـــــل

في البداية يمكن تلخيص التمرين كمايلي

	احتمال الحياة	احتمال الوفاة = ١- احتمال الحياة
الشخص (أ)	٠,٩٠	١ – ٠,٩٠ = ٠,١٠
الشخص (ب)	٠,٨٠	١ – ٠,٨٠ = ٠,٢٠
الشخص (ج)	٠,٧٥	١ – ٠,٧٥ = ٠,٢٥

أ – احتمال وفاة الثلاث أشخاص معاً تعني احتمال وفاة (أ) و وفاة(ب) و وفاة (ج) = ٠,١٠ × ٠,٢٠ × ٠,٢٥

= $\boxed{٠,٠٠٥}$

ب- احتمال حياة شخصين فقط تعني احتمال حياة (أ) وحياة(ب) ووفاة(ج) أو حياة(أ)ووفاة(ب)وحياة(ج) أو وفاة(أ) وحياة(ب) وحياة(ج)

= ٠,٩٠×٠,٨٠×٠,٢٥+٠,٩٠×٠,٢٠×٠,٧٥+٠,١٠×٠,٨٠×٠,٧٥

= ٠,١٨ + ٠,١٣٥ + ٠,٠٦

= $\boxed{٠,٣٧٥}$

العينات الإحصائية واحتمالات الحياة والوفاة

نظراً لأن الحياة والوفاة هما حدثين متنافين فيمكن استخدام توزيع ذو الحدين لتحديد احتمالات الحياة والوفاة لعدد معين من الأشخاص (س) المتواجدين ضمن عينة عشوائية بسيطة حجمها (ن) بمعلومية احتمال الوفاة المقدر (ح) فى مجتمع البحث، إن الإستعانه بتوزيع ذو الحدين لحساب احتمالات الحياة واحتمالات الوفاة لأكثر من شخصين يوفر الكثير من الوقت والجهد، وذلك باستخدام القانون التالى:

$$ح_س = {}^{ن}ق_س \times ح^{س} \times (١ - ح)^{ن-س}$$

معنى الرموز

ن ⟵ حجم العينة المأخوذة من المجتمع (عدد مفرداتها)

س ⟵ عدد الوفيات المطلوب احتماله بمعنى إذا كان المطلوب كالأتى : ما هو احتمال وفاة (٣) أشخاص ∴ س = ٣

ق ⟵ زر ${}^{n}C_{r}$ بالآلة الحاسبة

ح ⟵ احتمال وفاة الفرد الواحد (فى فئة عمرية معينة) معطى

مثال

إذا كان الاحتمال المقدر بواسطة إحدى شركات التأمين للوفيات فى فئة العمر من (٤٥) إلى أقل من (٥٥) سنة هو ٠,٢٠ ، فإذا سحبت عينة بسيطة مكونة من (٤) أشخاص فى نفس فئة العمر، أحسب :-

- أولاً : احتمال وفاة شخص
- ثانياً : احتمال وفاة شخصين
- ثالثاً: احتمال وفاة ٣ أشخاص
- رابعاً : احتمال وفاة ٤ أشخاص

الحل

حجم العينـــة (ن) ⟵ ٤

العدد المطلـــــوب (س) ⟵ حسب المطلوب

احتمال الوفاة المقدر (ح) ⟵ ٠,١٠

<u>أولاً: احتمال وفاة شخص واحد (س = ١)</u>

$$\text{ح}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (\text{١} - \text{ح})^{\text{ن-س}}$$

$$\text{ح}_{\text{١}} = {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{١}} \times (\text{٠,٢٠})^{\text{١}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{٣}}$$

$$= \text{٤} \times \text{٠,٢٠} \times \text{٠,٥١٢}$$

$$= \boxed{\text{٠,٤٠٩٦}}$$

<u>ثانياً: احتمال وفاة شخصين (س = ٢)</u>

$$\text{ح}_{\text{٢}} = {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٢}} \times (\text{٠,٢٠})^{\text{٢}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{٢}}$$

$$= \text{٦} \times \text{٠,٠٤} \times \text{٠,٦٤}$$

$$= \boxed{\text{٠,١٥٣٦}}$$

<u>ثالثاً: احتمال وفاة ثلاثة أشخاص (س = ٣)</u>

$$\text{ح}_{\text{٣}} = {}^{\text{٤}}\text{ق}_{\text{٣}} \times (\text{٠,٢٠})^{\text{٣}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{١}}$$

$$= \text{٤} \times \text{٠,٠٠٨} \times \text{٠,٨}$$

$$= \boxed{\text{٠,٠٢٥٦}}$$

ثالثاً: احتمال وفاة أربعة أشخاص (س = ٤)

$$ح_٤ = {}^٤ق_٤ \times (٠,٢٠)^٤ \times (٠,٨٠)^٠$$

$$ح_٤ = ١ \times ٠,٠٠١٦ \times ١$$

$$ح_٤ = \boxed{٠,٠٠١٦}$$

مثال

كان الاحتمال المقدر للوفاة فى فئة معينة من فئات العمر هو (٠,٢٠) وسحبت عينة من (٥) أشخاص. احسب احتمال وفاة ثلاثة أشخاص على الأقل ؟

الحل

ح	ن	س	=	
٠,٢٠	٥		=	ثلاثة على الأقل
			=	٣ أو ٤ أو ٥

∴ الاحتمال المطلوب = $ح_٣ + ح_٤ + ح_٥$

$$= {}^٥ق_٣ \times (٠,٢٠)^٣ \times (٠,٨٠)^٢$$

$$+ {}^٥ق_٤ \times (٠,٢٠)^٤ \times (٠,٨٠)^١$$

$$+ {}^٥ق_٥ \times (٠,٢٠)^٥ \times (٠,٨٠)^٠$$

$$= ٠,٠٥١٢ + ٠,٠٠٦٤ + ٠,٠٠٠٣٢$$

$$= \boxed{٠,٠٥٧٩٢}$$

مثال:

كان الاحتمال المقدر بواسطة إحدى شركات التأمين للوفيات في فئة العمر (من ٥٥ سنة إلي أقل من ٦٠ سنة) هو ٠,٣٣ فإذا سحبت عينة عشوائية من ٥ أشخاص في نفس فئة العمر إحسب الاحتمالات الأتية:

- احتمال وفاة شخص واحد.
- احتمال وفاة شخصين.
- احتمال وفاة شخصين علي الأكثر.
- احتمال وفاة ثلاث أشخاص علي الأقل.

الحل

ن حجم العينة = ٥ أشخاص.

ح احتمال الوفاة = ٠,٣٣.

س عدد الوفيات المطلوب احتماله .

$$\text{ح}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (\text{١} - \text{ح})^{\text{ن-س}}$$

<u>احتمال وفاة شخص واحد</u>

تعني س = ١

$$\text{ح}_{(\text{١})} = {}^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{١}} \times (\text{٠,٣٣})^{\text{١}} \times (\text{١} - \text{٠,٣٣})^{\text{٥-١}}$$

$$= \boxed{\text{٠,٣٣٢}}$$

<u>احتمال وفاة شخصين</u>

تعني س = ٢

$$\text{ح}_{(\text{٢})} = {}^{\text{٥}}\text{ق}_{\text{٢}} \times (\text{٠,٣٣})^{\text{٢}} \times (\text{١} - \text{٠,٣٣})^{\text{٥-٢}}$$

$$= \boxed{\text{٠,٣٢٨}}$$

احتمال وفاة شخصين علي الأكثر

تعني س = ٢ أو س = ١ أو س = صفر

$ح_{(صفر)} = {}^{٥}ق_{صفر} \times (٠,٣٣)^{صفر} \times (١ - ٠,٣٣)^{٥-صفر} = ٠,١٣٥$

الاحتمال المطلوب = $ح_{(٢)} + ح_{(١)} + ح_{(صفر)}$

الاحتمال المطلوب = ٠,٣٢٨ + ٠,٣٣٢ + ٠,١٣٥

$= \boxed{٠,٧٩٥}$

احتمال وفاة ثلاثة أشخاص علي الأقل

تعني س = ٣ أو س = ٤ أو س = ٥

$ح_{(٣)} = {}^{٥}ق_{٣} \times (٠,٣٣)^{٣} \times (١ - ٠,٣٣)^{٥-٣} = ٠,١٦١$

$ح_{(٤)} = {}^{٥}ق_{٤} \times (٠,٣٣)^{٤} \times (١ - ٠,٣٣)^{٥-٤} = ٠,٠٤$

$ح_{(٥)} = {}^{٥}ق_{٥} \times (٠,٣٣)^{٥} \times (١ - ٠,٣٣)^{٥-٥} = ٠,٠٠٤$

الاحتمال المطلوب = $ح_{(٣)} + ح_{(٤)} + ح_{(٥)}$

= ٠,١٦١ + ٠,٠٤ + ٠,٠٠٤

$= \boxed{٠,٢٠٥}$

مثال:

إذا كان الاحتمال المقدر بواسطة إحدى شركات التأمين للوفيات في فئة العمر (من ٦٢ سنة إلي أقل من ٦٦ سنة) هو ٠,٢٠ فإذا سحبت عينة عشوائية من ٨ أشخاص في نفس فئة العمر احسب :

- احتمال حياة شخص واحد.
- احتمال حياة شخصين.
- احتمال حياة شخصين علي الأكثر.

الحل

ن حجم العينة = ٨ أشخاص.

ح احتمال النجاح وهو هنا احتمال الحياة = ١-٠,٢٠ = ٠,٨٠.

س عدد الوحدات المطلوبة التي تصف حالة الحياة.

$$\text{ح}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} \times \text{ح}^{\text{س}} \times (\text{١} - \text{ح})^{\text{ن-س}}$$

<u>احتمال حياة شخص واحد</u>

تعني س = ١

$$\text{ح}_{(\text{١})} = {}^{\text{٨}}\text{ق}_{\text{١}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{١}} \times (\text{١} - \text{٠,٨٠})^{\text{٨-١}}$$

$$= \boxed{\text{٠,٠٠٠٠٨٢}}$$

<u>احتمال حياة شخصين</u>

تعني س = ٢

$$\text{ح}_{(\text{٢})} = {}^{\text{٨}}\text{ق}_{\text{٢}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{٢}} \times (\text{١} - \text{٠,٨٠})^{\text{٨-٢}}$$

$$= \boxed{\text{٠,٠٠٠٩٨}}$$

<u>احتمال حياة شخصين علي الأكثر</u>

تعني س = ٢ أو س = ١ أو س = صفر

$$\text{ح}_{(\text{صفر})} = {}^{\text{٨}}\text{ق}_{\text{صفر}} \times (\text{٠,٨٠})^{\text{صفر}} \times (\text{١} - \text{٠,٨٠})^{\text{٨- صفر}} = \text{٠,٠٠٠٠٠٠٢٦}$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = \text{ح}_{(\text{٢})} + \text{ح}_{(\text{١})} + \text{ح}_{(\text{صفر})}$$

$$= \text{٠,٠٠٠٩٨} + \text{٠,٠٠٠٠٨٢} + \text{٠,٠٠٠٠٠٢٦}$$

$$= \boxed{\text{٠,٠٠٠١٠٦}}$$

تمارين

(١) إذا كان احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٨٠ وأيضاً وجدنا أن احتمال وفاة شخص (ب) = ٠,٣٠

<u>أوجد</u>

- احتمال حياتهما معاً.
- احتمال وفاتهما معاً.
- احتمال حياة (أ) و وفاة (ب).
- احتمال وفاة (أ) و حياة (ب).
- احتمال حياة أحدهما فقط.
- احتمال حياة أحدهما علي الأقل.

---

(٢) إذا علمنا أن احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٦ واحتمال حياة شخص (ب) = ٠,٨ واحتمال حياة شخص (ج) = ٠,٧

<u>أوجد:</u>

أ - احتمال وفاة الثلاث أشخاص معاً.

ب – احتمال حياة شخصين فقط.

جـ – احتمال حياة شخصين علي الأقل.

ء – احتمال حياة شخصين علي الأكثر.

---

(٣) إذا كان الاحتمال المقدر بواسطة إحدى شركات التأمين للوفيات في فئة العمر (من ٦٥ سنة إلي أقل من ٧٠ سنة) هو ٠,٤٥ فإذا سحبت عينة عشوائية من ٥ أشخاص في نفس فئة العمر

<u>احسب</u> :

أ- احتمال وفاة شخص واحد.
ب- احتمال وفاة شخصين.
ت- احتمال وفاة شخصين علي الأكثر.
ث- احتمال وفاة ثلاث أشخاص علي الأقل.

---

(٤) كان الاحتمال المقدر بواسطة إحدى شركات التأمين للوفيات في فئة العمر (من ٦٠ سنة إلي أقل من ٦٥ سنة) هو ٠,٤ فإذا سحبت عينة عشوائية من ٤ أشخاص في نفس فئة العمر

احسب

أ- احتمال وفاة شخصين علي الأكثر.
ب- احتمال حياة شخصين علي الأقل.

الفصل الثانى

المفاهيم الأساسية للخطر وأنواعه وقياسه

مقدمة

ينظر البعض إلى التأمين على أنه نقل عبء تحمل الأخطار باستبدال الخسارة الكبيرة المحتملة والناتجة من تحقق الخطر بخسارة قليلة مؤكدة (وهى قسط التأمين)، فالتأمين هو تعاون مجموعة معرضة لخطر معين (أفراد أو منشآت كبيرة أو متوسطة أو صغيرة) فى تعويض من يتحقق له الخطر وتقوم بهذا الدور شركات التأمين فى مقابل مبلغ معين يتم تحديده رياضياً وإحصائياً وباستخدام أساليب التنبؤ والتقدير لعناصر تحقق الخطر. وتلتزم شركة التأمين (المؤمن) بموجب عقد التأمين أن تدفع للمؤمن له مبلغ التعويض المتفق عليه عند تحقق الخطر المؤمن منه.

والخطر هو ظاهرة تسبب خسارة مستقبلية محتملة الوقوع نتيجة عدم التأكد إلا أنه يمكن قياسها واتخاذ القرار المناسب لمواجهتها. ويتميز الخطر بالخصائص الأتية :

(١) الخطر خسارة مستقبلية بمعنى أن الخطر ليس خسارة ماضية أو حالية تحققت أو تتحقق ولكنه خسارة قد تتحقق فى فترة زمنية مستقبلية .

(٢) الخطر خسارة محتملة الوقوع بمعنى أن الخطر ليس خسارة مؤكدة .

(٣) الخطر يمكن قياسه بمعنى أن الخطر ليس ظاهرة غير مقاسة ولكن يمكن تحديده باستخدام مقاييس مادية .

أنواع الخطر

وينقسم الخطر إلى الأنواع الآتية:

<u>أولاً : خطر اقتصادى</u>

هو الخطر الذى يسبب خسارة مالية للشخص أو للمنشأة ويسبب نقصاً فى رأس المال الستثمر أو الأصول والممتلكات مثل خطر الحريق

أو خطر السرقة. وقد يحدث الخطر الاقتصادى بسبب فقدان المنشأة لسوق السلعة التى تنتجها كذلك فقد يحدث الخطر الاقتصادى بسبب أخطار طبيعية مثل الزلازل .

ثانياً : خطر غير اقتصادي

هو الخطر الذى يسبب خسارة معنوية للشخص أو للمنشأة مثل خطر الخوف من فقدان رب الأسرة أو خطر فقد سمعة المنشأة بسبب شائعة معينة، وقد يتحول الخطر غير الاقتصادى إلى خطر اقتصادى إذا سببت العوامل المعنوية والنفسية تأثيراً سلبياً على النشاط الاقتصادى للشخص أو للمنشأة.

ثالثاً : خطر الخسارة المؤكدة

هو الخطر الذى يسبب خسارة مؤكدة دون أى ربح مثل خطر الوفاه أو المرض أو البطالة أو الإفلاس.

رابعاً : خطر الخسارة والربح

خطر الخسارة و الربح هو الخطر الذى يتضمن الخسارة و الربح وذلك طبقاً لظروف السوق نتيجة التغيرات المستمرة فى أسعار السلع أو معدلات الفائدة فى أسواق المال.

قياس الخطر

يتم قياس الخطر عن طريق قياس عناصر الخطر و هى :

(أ) حجم الخسارة المادية المحتملة.

(ب) احتمال وقوع الخسارة.

فإذا كان :

حجم الخسارة المادية المحتملة (خ) ، احتمال الخسارة (ح) فإن :

القيمة المتوقعة الخسارة = $\boxed{\text{مجـ خ} \times \text{ح}}$

الفصل الثالث

تحليل شروط الأخطار القابلة للتأمين

يجب أن تتوافر فى الأخطار القابلة للتأمين الشروط الأساسية التالية:

١ - أن يكون الخطر المؤمن منه احتماليا

يجب إن يكون الخطر القابل للتأمين احتماليا بمعنى ألا يكون مستحيل الحدوث (حيث لامعنى للتأمين هنا) وألا يكون مؤكد الحدوث (لأن الجميع سوف يحصلون على تعويض) مع ملاحظة أن خطر الوفاه مؤكد الحدوث ولكن توقيت حدوث الوفاه غير مؤكد فيمكن فى هذه الحالة اعتباره من المخاطر الاحتمالية.

٢ - أن يكون الخطر المؤمن منه مشروعاً

يجب إن يكون الخطر القابل للتأمين مشروعاً ولايخالف النظام العام والآداب العامة وقواعد الأخلاق فلا يمكن تصور التأمين ضد خطر مصادرة شحنة مخدرات أو ضد خطر الخسارة فى ألعاب القمار وغيرها من الأنشطة غير المشروعة.

٣ - أن يكون الخطر المؤمنن منه قابلا للقياس الكمى

يجب إن يكون الخطر القابل للتأمين قابلاً للقياس الكمى لكى يمكن تقدير الخسارة الناتجة من تحقق ذلك الخطر ، وحتى تسهل عملية إثبات تحقق الخطر. إن تحقق خطر الحريق مثلاً قابل للقياس الكمى حيث يمكن بسهولة تحديد حجم الخسارة الناتجة عن الحريق

٤ - أن يكون الخطر المؤمن منه عاماً

يجب إن يكون الخطر القابل للتأمين عاماً، حيث يشترك عدد كبير من الأفراد أو المنشآت المعرضة لتحقق الخطر فى دفع أقساط التأمين بهدف تعويض من يتحقق له الخطر المؤمن منه وإذا لم يكن الخطر المؤمن منه عاماً فإن قسط التأمين فى هذه الحالة يكون كبيراً جداً.

إدارة الخطر

تعنى إدارة الخطر مجموعة الإجراءات التى تقوم بها إدارة المنشأة للسيطرة على الخطر بأقل تكلفة ممكنة . ويتم ذلك عن طريق الدراسة التحليلية لجميع أنشطة المنشأة وتحديد مصادر الخطر والتقديرات المستقبلية لحجم الخسارة المتوقعة فى حالة تحققه.

أساليب إدارة الخطر

يوجد ثلاث أساليب و هى:

الأسلوب الأول : تحمل المخاطر

فى هذه الحالة تقوم المنشأة بتكوين الاحتياطات المالية بهدف تحمل المخاطر المستقبلية .

الأسلوب الثانى : منع الخطر وتقليل فرصة حدوثه

فى هذه الحالة تقوم الممنشأة باستخدام الطرق العلمية والخاصة باحتياطات الأمن الصناعى بهدف منع الخطر أو تقليل تأثيراته.

الأسلوب الثالث : تحويل الخطر

فى هذه الحالة تقوم المؤسسة بتحويل الخطر بمعنى الاشتراك فى نظام التأمين .

الأسلوب الأمثل لإدارة الخطر

فى ظل التطورات السريعة فى مجالات الانتاج وأسواق المال المحلية والعالمية فإن الأسلوبين الأول (تحمل المخاطر) والثانى (منع الخطر وتقليل فرصة حدوثه) لايمكن للمؤسسات الاقتصادية اتباعهما ليكون الأسلوب الأمثل هو تحويل الخطر أى اتباع نظام التأمين .

الفصل الرابع

عناصر ومبادئ التأمين

أولاً : عناصر التأمين

يوجد عنصرين وهما:

العنصر الأول : قسط التأمين

وهو المبلغ الواجب دفعه لشركة التأمين التى تتحمل عبء تحمل المخاطر وتعويض من يتحقق له الخطر المؤمن منه ويتم تحديد قسط التأمين عن طريق دراسة احتمالات تحقق الخطر المؤمن منه.

العنصر الثانى : مبلغ التعويض

وهو المقابل الذى تدفعه شركة التأمين إلى المؤمن عند تحقق الخطر منه ويكون محدداً فى عقد التأمين .

ثانياً :مبادىء التأمين

يخضع التأمين للمبادىء التالية:

أولاً : مبدأ الأمانة الكاملة

طبقا لهذا المبدأ فإنه يجب على المؤمن له عدم إخفاء أية بيانات جوهرية أو حقائق معينه عن الخطر محل التأمين ففى تأمينات الحياة مثلاً لاتكتفى شركة التأمين بإقرارات المؤمن له بأنه لايعانى منن أمراض معينة فتقوم بإجراء الكشف الطبى عليه .

ثانياً : مبدأ السبب الفعال

طبقاً لهذا المبدأ فإن شركة التأمين لاتلتزم بدفع قيمة التعويض إلا إذا كان الخطر المؤمن منه هو السبب الفعال فى تحقق الخسارة أى السبب المباشر فى حدوث الخطر المؤمن منه .

ثالثاً : مبدأ المصلحة التأمينية

طبقاً لهذا المبدأ فإنه يجب أن تكون للمؤمن له مصلحة اقتصادية فى التعاقد مع شركة التأمين فالشخص يقوم بالتأمين على مصنعه ضد الحريق ويقوم بالتأمين على حياته وحياة أفراد أسرته التى تربطة بهم صلات اجتماعية و هذا معنى المصلحة التأمينية.

رابعاً : مبدأ المشاركة والتعويض

طبقاً لهذا المبدأ فإنه فى حالة قيام المؤمن له بالتأمين ضد تحقق خطر معين لدى عدة مؤمنين (شركات تأمين) فإن كل شركة تأمين تتحمل نصيباً معيناً فى التعويض عند تحقق الخطر المؤمن منه وذلك بمقدار مبلغ التأمين لدى هذه الشركة وذلك بحيث لاتتجاوز دائماً - سواء كان التأمين لدى شركة واحدة أو لدى عدة شركات - قيمة التعويض مبلغ الخسارة الناتجة عن تحقق الخطر طبقاً لقاعدة عدم الاثراء من التأمين وهى قاعدة منطقية لأن التأمين تعويض وليس تربح .

مثال توضيحى

يمكن توضيح كيفية تطبيق مبدأ المشاركة والتعويض عند حساب مبلغ التعويض (ض) عند تحقق الخطر المؤمن منه، حيث يحصل المؤمن له على قيمة الخسارة الناتجة من تحقق الخطر من شركات التأمين المختلفة طبقاً لنسبة مبلغ التأمين لدى كل شركة وذلك من خلال تطبيق العلاقة التالية :

$$ض = خ \times \frac{ت}{ن}$$

حيث :

خ قيمة الخسارة

ت مبلغ التأمين

ن قيمة الشئ محل التأمين

كما يتضح من الحالة التطبيقية التالية:

قام أحد المصانع بالتأمين على الآلات ضد الحريق بمبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه لدى شركتين من شركات التأمين وكان مبلغ التأمين لدى الشركة الأولى ٤٠٠٠٠ جنيه ولدى الشركة الثانية ٦٠٠٠٠ جنيه فإذا كانت قيمة الآلات محل التأمين ١٠٠٠٠٠ جنيه . إذا تحقق خطر الحريق وقدرت الخسائر بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه، إحسب نصيب كل شركة فى التعويض .

الحل

$خ = ٢٠٠٠٠$ $م_١ = ٤٠٠٠٠$ $م_٢ = ٦٠٠٠٠$ $ن = ١٠٠٠٠٠$

(١) إيجاد نصيب الشركة الأولى فى التعويض (ض١)

$$ض\,١ = خ \times \frac{ت\,١}{ن}$$

$$ض\,١ = ٢٠٠٠٠ \times \frac{٤٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠} = ٨٠٠٠$$

(١) إيجاد نصيب الشركة الثانية في التعويض (ض٢)

$$ض\,٢ = خ \times \frac{ت\,٢}{ن}$$

$$ض\,٢ = ٢٠٠٠٠ \times \frac{٦٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠} = ١٢٠٠٠ \text{ جنيه}$$

أى أن المؤمن له حصل على قيمة الخسارة الناتجة من تحقق خطر الحريق من الشركتين طبقاً لنسبة مبلغ التأمين لديها فكان نصيبه من التعويض من الشركة الأولى ٨٠٠٠ جنيه ومن الشركة الثانية ١٢٠٠٠ جنيه ومجموعها يساوى ٢٠٠٠٠ جنيه وهى تساوى قيمة الخسارة الناتجة من تحقق خطر الحريق دون أية زيادة.

الفصل الخامس

جـــداول الحيـــاة

مقدمة

لا يستطيع أي شخص مهما بلغ من علم أن يحدد موعد وفاته أو موعد وفاة أي شخص آخر، لأن الحياة والموت بيد الله وحده عز وجل، وقد أخفى الله عز وجل لحظة الوفاة عن جميع خلقه لحكمة دقيقة حتى تستمر الحياة وذلك لأنه إذا علم أى شخص بموعد وفاته فسوف تتوقف الحياة بالنسبة له وسوف يترك كل شئ وينتظر تلك اللحظة. ولكن ليس معنى إخفاء لحظة النهاية عن الشخص أنها لن تأتى.

كما أنه لا نستطيع أن نأخذ من عمر الإنسان أو من حالته الصحية كأداه للتنبؤ بحياة أو وفاة شخص حيث أننا نجد بعض الأشخاص في سن الشباب وفي حالة صحيه جيدة ويفاجئهم الموت، بينما قد نجد بعض الأشخاص في سن الشيخوخة وفي حالة صحيه سيئة وقد يمتد بهم العمر طويلاً، إلا أنه عند ملاحظة عدد كبير من الأشخاص وليكن مليون شخص عند سن معين وليكن سن ٥٠ سنة وبتسجيل عدد الوفيات خلال عام واحد من هؤلاء الأشخاص وليكن عدد الوفيات تم حصره بـ ٥٠٠٠ شخص وبتكرار هذه التجربة عدد كبير من المرات فإنه تبعاً لمفهوم الاحتمالات يمكن الحصول علي تقدير لاحتمال الوفاة لتلك الأشخاص يقدر بـ:

تعريف جداول الحياة

يمكن تعريف جداول الحياة بأنها جداول تلخص التغيرات في حياة مجموعة نظرية أو فعلية من السكان منذ الولادة وحتي الوفاة. كما يمكن تعريفها أيضاً بأنها كشف يبين التغير الطبيعي للسكان بالنسبة للحياة والوفاة حسب فئات السن المختلفة. وتستعين شركات التأمين بتلك الجداول

للحصول علي تقديرات لاحتمالات الحياة والوفاة تمهيداً للاستعانه بهذه الاحتمالات في حساب الأقساط وقيمة التصفية لعقد التأمين.

مصادر بيانات جداول الحياة

يتم الحصول علي بيانات جداول الحياة وأهمها عدد الوفيات وعدد الأحياء عند فئات عمرية مختلفة عن طريق مصدرين أساسيين هما:

١. الإحصاءات العامة

وتوجد فى السجلات التي يقيد بها حالات المواليد وحالات الوفيات والبيانات الخاصة بالتعداد السكاني، وفي مصر يمكن الاعتماد علي الجهاز المركزي للتعبئة العامة والإحصاء في الحصول علي هذه الإحصاءات بطريقة سهلة ودقيقة ولسنوات عديدة.

٢. إحصاءات شركات التأمين

أن شركات التأمين تتعامل مع الجمهور لسنوات طويلة ولدي هذه الشركات قواعد بيانات هائلة يمكن عن طريقها تكوين جداول حياة دقيقة، إعتماداً علي الخبرات العملية لهذه الشركات. وجدير بالذكر أن معدلات الوفاة المستخرجة من بيانات الإحصاءات العامة تكون أعلي من معدلات الوفاة المستخرجة من إحصاءات شركات التأمين بقليل وذلك لأن شركات التأمين تعتمد في حصولها علي بياناتها علي فئة مختارة بعناية من الجمهور ككل بعد إخضاعها للكشف الطبي.

إفتراضات جداول الحياة

١- فقدان الأشخاص بالموت فقط وليس لأي سبب اخر كالهجرة مثلاً.
٢- التعامل مع المواليد كدفعة عددها ١٠ أو ١٠٠ أو ١٠٠٠ أو ١٠٠٠٠٠ أو مضاعفاتهم ويسمي هذا العدد بأساس الجدول وتراقب هذه الدفعة حتي وفاة اخر عضو بها ولا يسمح بدخول مواليد جدد.
٣- الأعداد في الجدول هي أعداد نسبية وليست مطلقة حيث أنها منسوبة لأساس الجدول.

٤ - عند الحديث عن جداول الحياة لشخص معين فنفترض أننا بصدد الحديث عن جداول الحياة للذكور حيث توجد جداول حياة للذكور وأخري للإناث نظراً لاختلاف احتمالات الوفاة بين الذكور والإناث، وفي بعض الدول توجد جداول للحياة لسكان الريف وأخري لسكان الحضر.

أنواع جداول الحياة

يوجد نوعان لجداول الحياة هما جداول الحياة الجارية (الحالية) وجداول الحياة لدفعة أو لجيل معين ويمكن توضيحهما كما يلي:

- جدول الحياة لدفعة (لجيل محدد)

في هذا الجدول تسجل الوفيات لمجموعة من الأشخاص من تاريخ ولادتهم وحتي وفاة آخر عضو في هذه المجموعة وهذه الجداول تحتاج لمجهود شاق لأنها تتطلب متابعة كل عضو في هذه المجموعة كما يصعب تغطيتها لفترة زمنية كبيرة.

- جدول الحياة الجاري (الحالي)

هذا الجدول يتم إعداده لفترة زمنية قصيرة بين تعدادين (من سنة واحدة وحتي خمس سنوات علي الأكثر) ويتم اختيار هذه الفترة بناء علي الثبات التقريبي لمعدلات الوفاة بين تلك التعدادين.

استخدامات وفوائد جداول الحياة

١ - تستخدم في تحليل الخصوبة والإنجاب والهجرة وحجم وتركيب السكان فبالتالي تستخدم في العديد من الدراسات السكانية المختلفة.

٢ - تستخدم في تحليل العديد من الخصائص الاجتماعية والإقتصادية للسكان كدراسة الزواج ومعدلات العنوسة والحالات التعليمية والصحية للسكان.

٣ ـ تستخدم في تخطيط القوي العاملة عن طريق معرفة عدد الأفراد الباقين بالخدمة ومعرفة نسب الفقد سواء كان الفقد بسبب الوفاة أو التقاعد .

٤ـ تستخدم لمساعدة المسئولين عن التخطيط في الدولة لإتخاذ قرارات رشيدة فهي مثلاً تساعد في معرفة عدد الأفراد الذين سيصبحون في سن الإلتحاق بالمدرسة أو الإلتحاق بالجامعات وبالتالي يمكن تقدير عدد المدارس أو عدد الجامعات التي ستحتاجها الدولة .

الأعمدة التي يتكون منها معظم جداول الحياة

تتكون معظم جداول الحياة من خمس أعمدة هي بالترتيب

العمود الأول: عمود فئات العمر ورمزه (س)

يعبر عن فئات العمر بالسنوات الكاملة أي العمر الذي بلغه الفرد في آخر عيد ميلاد له ولا تحسب كسور السنة مهما بلغت وهو يأخذ أرقام متغيرة متتالية تبدأ بأصغر سن وهو صفر إلي أكبر سن وهو حوالي ١٠٠ سنة، وإن كانت بعض الجداول تبدأ من أعمار ١١ سنة للذكور ، ١٤ سنة للإناث وتنتهي عند أعمار ٧٥ سنة وذلك نظراً لارتفاع معدلات الوفاة بين الأطفال دون سن الحادية عشر وأيضاً الشيوخ التي تزيد أعمارهم عن ٧٥ سنة، إلا أنه يمكن تكوين جدول حياة لأي فئة عمرية ولتكن من السن ٣١ وحتي السن ٣٥ فقط.

العمود الثاني: عمود عدد الأحياء ورمزه ($ل_س$)

يعبر عن عدد الأشخاص علي قيد الحياة عند تمام العمر س وذلك عن سنوات العمر المختلفة الموجودة في الجدول، ويلاحظ أن عدد الأحياء أمام العمر س وليكن (١٠٠٠٠٠ فرد) يمثل أساس الجدول، فمثلاً إذا كان ($ل_{٢٠}$ = ٩٠٠٠٠) فهذا يعني أن عدد الأحياء الذين بلغوا تمام العمر ٢٠ سنة هم ٩٠٠٠٠ شخص .

العمود الثالث: عمود عدد الوفيات ورمزه ($و_س$)

يعبر عن عدد الوفيات التي حدثت خلال سنة واحدة بين العمر(س) وتمام العمر (س+١)، فمثلاً إذا كان ($و_{٢٠}$ = ٥٠٠٠) فهذا يعني أن عدد الوفيات للأشخاص من سن ٢٠ عام وحتي تمام العمر ٢١ عام بلغوا ٥٠٠٠ شخص، ويمكن الوصول لنتيجة أخري أنه إذا كان($ل_{٢٠}$ = ٨٠٠٠٠) فإنه في هذه الحالة ستصبح ($ل_{٢١}$ = ٧٥٠٠٠) لوفاة ٥٠٠٠ شخص خلال تلك العام.

ويمكن الحصول علي أرقام هذا العمود عن طريق العلاقة التالية

$$\boxed{و_س = ل_س - ل_{س+١}}$$

$$و_{٢٠} = ل_{٢٠} - ل_{٢١}$$

وبالمثل $$و_{٢١} = ل_{٢١} - ل_{٢٢}$$

$$و_{٢٢} = ل_{٢٢} - ل_{٢٣}$$ وهكذا

هذا يعني أن عدد الوفيات في سن معين يمكن الحصول عليه عن طريق طرح عدد الأحياء في نفس السن من عدد الأحياء في العام التالي مباشرة لهذا السن.

العمود الرابع: عمود احتمال الوفاة ورمزه ($ف_س$)

يعبر عن احتمال أن شخص في تمام العمر(س) سيموت خلال سنة واحدة أي قبل بلوغه تمام العمر (س+١)، فمثلاً ($ف_{٣٠}$ = ٠,٠٦) تعني أن احتمال الوفاة لشخص في العمر ٣٠ وسوف يموت خلال عام واحد فقط أي قبل بلوغه تمام العمر ٣١ هو ٦% ويمكن الحصول علي أرقام هذا العمود عن طريق تطبيق العلاقة التالية

$$\boxed{ف_س = و_س \div ل_س}$$

$$ف_{٣٠} = و_{٣٠} \div ل_{٣٠}$$

وبالمثل $$ف_{٣١} = و_{٣١} \div ل_{٣١}$$

$ف_{٢٢} = و_{٢٢} \div ل_{٢٢}$ وهكذا

هذا يعني أنه يمكن إيجاد احتمال الوفاة لسن معين عن طريق قسمة عدد الوفيات في هذا السن علي عدد الأحياء في نفس السن.

العمود الخامس: عمود احتمال الحياة ورمزه ($ح_{س}$)

يعبر عن احتمال أن شخص في تمام العمر (س) سيعيش سنة واحدة أي سيبلغ تمام العمر (س+١)، فمثلاً ($ح_{٢٠} = ٠,٩$) تعني أن احتمال الحياة لشخص في العمر ٢٠ وسوف يعيش لمدة عام واحد أي سيعيش ليبلغ تمام العمر ٢١ هو ٩٠% ويمكن الحصول علي أرقام هذا العمود بطريقتين:

الطريقةالأولى(معرفة احتمال الحياة بمعلومية عدد الأحياء لعامين متتالين)

يمكن إيجاد احتمال الحياة لسن (س) مثلا عن طريق قسمة عدد الأحياء لسن (س+١) علي عدد الأحياء لسن (س) وبالتالي يمكن تمثيل ذلك بالعلاقة التالية

$$\boxed{ح_{س} = \frac{ل_{س+١}}{ل_{س}}}$$

وهنا طريقة أخرى لمعرفة احتمال الحياة وذلك بمعلومية احتمال الوفاة، نعلم أن احتمال الحياة واحتمال الوفاة يعتبرا أحداث مكملة لبعضهما البعض بمعني أن الشخص إما يعيش أو يموت وليس هناك اختيار ثالث ، لذا فإن مجموع الاحتمالات لهذين الحدثين = ١٠٠% = الواحد الصحيح، بالتالي يمكن معرفة احتمال الحياة بمعلومية احتمال الوفاة كما في العلاقة التالية

$$\boxed{ح_{س} = ١ - ف_{س}}$$

ويمكننا إثبات أن مجموع احتمال الحياة واحتمال الوفاة يساوي الواحد الصحيح حسابياً كما يلي

نعلم مما سبق أن احتمال الحياة

$$ح_س = ل_{س+١} \div ل_س$$

ونعلم أيضاً أن احتمال الوفاة

$$ف_س = و_س \div ل_س$$

وحيث أن عدد الوفيات

$$و_س = ل_س - ل_{س+١}$$

فيمكن كتابة احتمال الوفاة علي الصورة التالية

$$ف_س = (ل_س - ل_{س+١}) \div ل_س$$

وبجمع احتمال الحياة واحتمال الوفاة فنحصل علي

$$ح_س + ف_س = \frac{ل_{س+١}}{ل_س} + \frac{ل_س - ل_{س+١}}{ل_س}$$

وبتوحيد المقامات

$$ح_س + ف_س = \frac{ل_{س+١} + ل_س - ل_{س+١}}{ل_س}$$

$$= \frac{ل_س}{ل_س}$$

$$= \boxed{١}$$

طرق تكوين جدول الحياة

من الممكن تكوين جدول الحياة عن طريق الحصول علي أرقام عمود عدد الأحياء ($ل_س$) والتي يمكن الحصول عليها عن طريق تسجيل وتتبع تواريخ الميلاد والوفاة لمجموعة كبيرة من الأفراد ولمدة طويلة من الزمن .

وتوجد طريقة أخري لتكوين جدول الحياة أكثر سهولة من سابقتها وهو بداية تكوين جدول الحياة اعتماداً علي عمود احتمال الوفاة ($ف_س$) لفئات السن المختلفة بعد ذلك نحتاج لاختيار أساس الجدول وهو عدد الأحياء عند أقل سن بالجدول وسوف نفترضه دائماً بمائة ألف شخص.

مثال

علي تكوين جدول الحياة بمعلومية عدد الأحياء

تتبعت إحدي شركات التأمين عدد عشرة الآف شخص فى سن ٣٠ عام وحتى سن ٣٤ عام الأحياء ولخصت ذلك في الجدول التالي:

العمر	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤
عدد الأحياء	١٠٠٠٠	٩٨٠٠	٩٥٠٠	٩٠٠٠	٨١٠٠

المطلوب : تكوين جدول الحياة علماً بأن عدد الوفيات للأشخاص من سن ٣٤ عام وحتي تمام العمر ٣٥ عام بلغوا ١٠٠٠ شخص

الحـــــــل

لدينا فى هذا المثال أرقام العمود الأول والعمود الثاني من جدول الحياة، وبالتالي يمكن البدء في الحصول علي بيانات العمود الثالث والخاصة بعدد الوفيات ($و_س$) تبعاً للعلاقة السابق ذكرها :

$$و_س = ل_س - ل_{س+١}$$

$و_{٣٠} = ل_{٣٠} - ل_{٣١} = ١٠٠٠٠ - ٩٨٠٠ = ٢٠٠$ شخص

وبالمثل $و_{٣١} = ل_{٣١} - ل_{٣٢} = ٩٨٠٠ - ٩٥٠٠ = ٣٠٠$ شخص.

$و_{٣٢} = ل_{٣٢} - ل_{٣٣} = ٩٥٠٠ - ٩٠٠٠ = ٥٠٠$ شخص.

$و_{٣٣} = ل_{٣٣} - ل_{٣٤} = ٩٠٠٠ - ٨١٠٠ = ٩٠٠$ شخص.

وللحصول علي بيانات العمود الرابع والخاصة باحتمال الوفاة ($ف_س$)
فيمكن الحصول عليها من العلاقة $ف_س = و_س \div ل_س$

$$ف_{٣٠} = \frac{و_{٣٠}}{ل_{٣٠}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠,٠٢$$

وبالمثل $ف_{٣١} = \frac{و_{٣١}}{ل_{٣١}} = \frac{٣٠٠}{٩٨٠٠} = ٠,٠٣$ تقريباً

$$ف_{٣٢} = \frac{و_{٣٢}}{ل_{٣٢}} = \frac{٥٠٠}{٩٥٠٠} = ٠,٠٥ \text{ تقريباً}$$

$$ف_{٣٣} = \frac{و_{٣٣}}{ل_{٣٣}} = \frac{٩٠٠}{٩٠٠٠} = ٠,١٠$$

$$ف_{٣٤} = \frac{و_{٣٤}}{ل_{٣٤}} = \frac{١٠٠٠}{٨١٠٠} = ٠,١٢ \text{ تقريباً}$$

وللحصول علي بيانات العمود الخامس والخاص باحتمالات الحياة ($ح_س$)
فيمكن الحصول عليها من العلاقة $ح_س = ١ - ف_س$

$$ح_{٣٠} = ١ - ف_{٣٠} = ١ - ٠,٠٢ = ٠,٩٨$$

$$ح_{٣١} = ١ - ف_{٣١} = ١ - ٠,٠٣ = ٠,٩٧$$

$$ح_{٣٢} = ١ - ف_{٣٢} = ١ - ٠,٠٥ = ٠,٩٥$$

$$ح_{٣٣} = ١ - ف_{٣٣} = ١ - ٠,١٠ = ٠,٩٠$$

$$ح_{٣٤} = ١ - ف_{٣٤} = ١ - ٠,١٢ = ٠,٨٨$$

من جميع البيانات السابقة نصل للشكل التالي لجدول الحياة

جدول الحياة للأعمار من ٣٠عام وحتي ٣٤ عام

فئات العمر	عدد الأحياء $ل_س$	عدد الوفيات $و_س$	احتمال الوفاة $ف_س$	احتمال الحياة $ح_س$
٣٠	١٠٠٠٠	٢٠٠	٠,٠٢	٠,٩٨
٣١	٩٨٠٠	٣٠٠	٠,٠٣	٠,٩٧
٣٢	٩٥٠٠	٥٠٠	٠,٠٥	٠,٩٥
٣٣	٩٠٠٠	٩٠٠	٠,١٠	٠,٩٠
٣٤	٨١٠٠	١٠٠٠ (معطي)	٠,١٢	٠,٨٨

مثال

<u>على تكوين جدول الحياة بمعلومية احتمال الوفاة:</u>

إذا أعطيت لك البيانات التالية:

العمر	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤
احتمال الوفاة	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٦	٠,٠٨	٠,١٠

المطلوب : تكوين جدول الحياة باستخدام المعلومات السابقة بافتراض أن أساس الجدول (عدد الأحياء فى سن ٣٠) هو ١٠٠٠٠٠ شخص.

الحل

فى البداية يمكننا إيجاد قيم العمود الخامس كاملة عن طريق العلاقة التالية: ح س = ١ – ف س

$ح_{٣٠}$ = ١ – $ف_{٣٠}$ = ١ – ٠,٠٣ = ٠,٩٧

$ح_{٣١}$ = ١ – $ف_{٣١}$ = ١ – ٠,٠٤ = ٠,٩٦

$ح_{٣٢}$ = ١ – $ف_{٣٢}$ = ١ – ٠,٠٦ = ٠,٩٤

$ح_{٣٣}$ = ١ – $ف_{٣٣}$ = ١ – ٠,٠٨ = ٠,٩٢

$ح_{٣٤}$ = ١ – $ف_{٣٤}$ = ١ – ٠,١٠ = ٠,٩٠

وسوف نستكمل العمود الثانى والثالث بالجدول صفاً صفاً بإيجاد القيم الخاصة بكل صف (سن) علي حده كما يلى:

- بالنسبة للعمر ٣٠ عام

نوجد عدد الوفيات($و_{س}$) بمعلومية هذه العلاقة **$ف_{س}$** = $و_{س}$ ÷ $ل_{س}$ والتي يمكن أن نستنتج منها أن $و_{س}$ = $ل_{س}$ × **$ف_{س}$**

$و_{٣٠}$ = $ل_{٣٠}$ × $ف_{٣٠}$ = ١٠٠٠٠٠ × ٠,٠٣ = ٣٠٠٠ شخص

- بالنسبة للعمر ٣١ عام

في البداية نوجد عدد الأحياء ($ل_{٣١}$) عن طريق عدد الأحياء في سن ٣٠ عام - عدد الوفيات في سن ٣٠ عام = ١٠٠٠٠٠ – ٣٠٠٠ = ٩٧٠٠٠

ثم نوجد عدد الوفيات($و_{س}$) عن طريق العلاقة $و_{س}$ = $ل_{س}$ × **$ف_{س}$**

$و_{٣١}$ = $ل_{٣١}$ × $ف_{٣١}$ = ٩٧٠٠٠ × ٠,٠٤ = ٣٨٨٠ شخص

<u>وبالمثل</u>

للأعمار ٣٢ ، ٣٣، ٣٤ عام فنحصل علي جدول الحياة التالي:

جدول الحياة للأعمار من ٣٠عام وحتي ٣٤ عام

فئات العمر	عدد الأحياء $ل_{س}$	عدد الوفيات $و_{س}$	احتمال الوفاة $ف_{س}$	احتمال الحياة $ح_{س}$
٣٠	١٠٠٠٠٠	٣٠٠٠	٠,٠٣	٠,٩٧
٣١	٩٧٠٠٠	٣٨٨٠	٠,٠٤	٠,٩٦
٣٢	٩٣١٢٠	٥٥٨٧	٠,٠٦	٠,٩٤
٣٣	٨٧٥٣٣	٧٠٠٣	٠,٠٨	٠,٩٢
٣٤	٨٠٥٣٠	٨٠٥٣	٠,١٠	٠,٩٠

رموز جداول الحياة

فى هذا الجزء سيتم استخدام بيانات جداول الحياة في الحصول علي احتمالات الحياة والوفاة لشخص خلال فترة من الزمنكما يلى:

أولاً: احتمال أن شخص عمره (س) يعيش لمدة (ن) من السنوات

نرمز لإحتمال أن شخص عمره (س) سنة سوف يعيش حتي تمام العمر (س+ن) بالرمز $_{ن}ح_{س}$ ويتم حسابها بالعلاقة

$$\boxed{_{ن}ح_{س} = \frac{ل_{س+ن}}{ل_{س}}}$$

فمثلاً إذا أردنا حساب احتمال حياة شخص عمره (س =٣٥سنة) يعيش لمدة (ن = ١٥ سنوات) تالية ، فيمكن التعبير عن ذلك تبعاً للعلاقة السابقة

$_{١٥}ح_{٣٥} = \frac{ل_{٣٥+١٥}}{ل_{٣٥}} = \frac{ل_{٥٠}}{ل_{٣٥}}$ ثم استخراج قيمة $ل_{٣٥}$ وقيمة $ل_{٥٠}$ من جدول الحياة واستنتاج قيمة الاحتمال المطلوب.

ثانياً: احتمال أن شخص عمره (س) يعيش لمدة (ن) من السنوات ويموت خلال السنة التالية مباشرة.

نرمز لإحتمال أن شخص عمره (س) سنة سوف يعيش حتي تمام العمر (س+ن) ويموت في السنة التالية مباشرة أي يموت بين العمرين(س+ن) ، (س+ن+١) بالرمز $_{ن|}ف_{س}$ وتحسب بالعلاقة

$$\boxed{_{ن|}ف_{س} = \frac{ل_{س+ن} - ل_{س+ن+١}}{ل_{س}}}$$

فمثلاً إذا أردنا حساب احتمال حياة شخص عمره (س =٣٠سنة) يعيش لمدة (ن = ١٠ سنوات) تالية أي يعيش لتمام العمر ٤٠ ويموت في السنة التالية مباشرة أي بين العمرين ٤٠، ٤١ عام ، فيمكن التعبير عن ذلك تبعاً للعلاقة السابقة كمايلي

$$\text{١٠} \mid \text{ف}_{\text{٣٠}} = \frac{\text{ل}_{\text{٣٠+١٠}} - \text{ل}_{\text{٣٠+١٠+١}}}{\text{ل}_{\text{٣٠}}} = \frac{\text{ل}_{\text{٤٠}} - \text{ل}_{\text{٤١}}}{\text{ل}_{\text{٣٠}}}$$

ثم باستخراج قيمة ل٣٠ وقيمة ل٤٠ وقيمة ل٤١ من جدول الحياة يمكن استنتاج قيمة الاحتمال المطلوب.

ثالثاً: احتمال أن شخص عمره (س) يعيش لمدة (ن) من السنوات ويموت خلال (م) من السنوات التالية.

نرمز لإحتمال أن شخص عمره (س) سنة سوف يعيش حتي تمام العمر (س+ن) ويموت خلال (م) من السنوات أي يموت بين العمرين(س+ن) ، (س+ن+م) بالرمز ن| م ف س وتحسب بالعلاقة

$$\boxed{\text{ن} \mid \text{م ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ل}_{\text{س+ن}} - \text{ل}_{\text{س+ن+م}}}{\text{ل}_{\text{س}}}}$$

فمثلاً إذا أردنا حساب احتمال حياة شخص عمره (س =٤٠سنة) يعيش لمدة (ن = ١٠ سنوات) تالية أي يعيش لتمام العمر ٥٠ ويموت خلال خمس سنوات أي بين العمرين ٥٠، ٥٥ عام ، فيمكن التعبير عن ذلك تبعاً للعلاقة السابقة كمايلي

$$\text{١٠} \mid \text{٥ ف}_{\text{٤٠}} = \frac{\text{ل}_{\text{٤٠+١٠}} - \text{ل}_{\text{٤٠+١٠+٥}}}{\text{ل}_{\text{٤٠}}} = \frac{\text{ل}_{\text{٥٠}} - \text{ل}_{\text{٥٥}}}{\text{ل}_{\text{٤٠}}}$$

ثم باستخراج قيمة $\text{ل}_{\text{٤٠}}$ وقيمة $\text{ل}_{\text{٥٠}}$ وقيمة $\text{ل}_{\text{٥٥}}$ من جدول الحياة يمكن استنتاج قيمة الاحتمال المطلوب.

رابعاً: احتمال أن شخص عمره (س) يموت خلال (ن) من السنوات.

نرمز لإحتمال أن شخص عمره (س) سنة سوف يموت خلال (ن) سنة التالية، أي احتمال وفاة شخص بين العمرين (س)،(س+ن) بالرمز $_{\text{ن}}\text{ف}_{\text{س}}$ ويتم حسابها بالعلاقة

$$\boxed{{}_{\text{ن}}\text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ل}_{\text{س}} - \text{ل}_{\text{س+ن}}}{\text{ل}_{\text{س}}}}$$

أو $${}_{\text{ن}}\text{ف}_{\text{س}} = ١ - {}_{\text{ن}}\text{ح}_{\text{س}}$$

فمثلاً إذا أردنا حساب احتمال وفاة شخص عمره (س =٦٠سنة) سوف يموت خلال مدة (ن = ١٠ سنوات) تالية،أي يموت بين العمرين ٦٠ ، ٧٠ عام فيمكن التعبير عن ذلك تبعاً للعلاقة السابقة كمايلي

$${}_{١٠}\text{ف}_{٦٠} = \frac{\text{ل}_{٦٠} - \text{ل}_{٦٠+١٠}}{\text{ل}_{٦٠}} = \frac{\text{ل}_{٦٠} - \text{ل}_{٧٠}}{\text{ل}_{٦٠}}$$

ثم باستخراج قيمة $\text{ل}_{٦٠}$ وقيمة $\text{ل}_{٧٠}$ من جدول الحياة يمكن استنتاج قيمة الاحتمال المطلوب.

مثال:

شخص عمره ٥٠ عام ، المطلوب التعبير رمزياً عن الاحتمالات التالية

أ- احتمال حياة هذا الشخص.
ب- احتمال وفاة هذا الشخص.

جـ - احتمال أن يعيش هذا الشخص لمدة ١٠ سنوات.

ء - احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٥٥ عام ويموت خلال السنة التالية مباشرة.

هـ - احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٥٥ عام ويموت خلال ثلاث سنوات تالية.

ز - احتمال أن يموت هذا الشخص خلال ٤ سنوات.

الحـــــل

أ- عمر الشخص الأن = س = ٥٠عام والمطلوب هو احتمال حياة هذا الشخص ، أي يمكننا تطبيق العلاقة التالية

$$\text{ح}_{\text{س}} = \frac{\text{ل}_{\text{س}+١}}{\text{ل}_{\text{س}}}$$

$$\text{ح}_{٥٠} = \frac{\text{ل}_{٥٠+١}}{\text{ل}_{٥٠}} = \frac{\text{ل}_{٥١}}{\text{ل}_{٥٠}}$$

ب- لإيجاد احتمال وفاة هذا الشخص يمكننا تطبيق إحدي علاقتين هما

$$\text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{و}_{\text{س}}}{\text{ل}_{\text{س}}} = \frac{\text{ل}_{\text{س}} - \text{ل}_{\text{س}+١}}{\text{ل}_{\text{س}}}$$

$$\text{ف}_{٥٠} = \frac{\text{و}_{٥٠}}{\text{ل}_{٥٠}} = \frac{\text{ل}_{٥٠} - \text{ل}_{٥٠+١}}{\text{ل}_{٥٠}} = \frac{\text{ل}_{٥٠} - \text{ل}_{٥١}}{\text{ل}_{٥٠}}$$

أو باستخدام علاقة الأحداث المكملة:

$$\text{ف}_{\text{س}} = ١ - \text{ح}_{\text{س}} = ١ - \frac{\text{ل}_{\text{س}+١}}{\text{ل}_{\text{س}}} = ١ - \frac{\text{ل}_{٥٠+١}}{\text{ل}_{٥٠}}$$

جـ - لإيجاد احتمال شخص عمره (س=٥٠عام) ويعيش لمدة(ن=١٠) يمكن تطبيق العلاقة الأتية:

$${}_{\text{ن}}\text{ح}_{\text{س}} = \frac{\text{ل}_{\text{س}+\text{ن}}}{\text{ل}_{\text{س}}} \quad \text{أي} \quad {}_{١٠}\text{ح}_{٥٠} = \frac{\text{ل}_{٥٠+١٠}}{\text{ل}_{٥٠}} = \frac{\text{ل}_{٦٠}}{\text{ل}_{٥٠}}$$

ء - لإيجاد احتمال شخص عمره(س= ٥٠عام) يعيش حتي العمر ٥٥ عام (أي سيعيش لمدة ن = ١٠ أعوام) ويموت خلال السنة التالية يمكن تطبيق العلاقة التالية:

$${}_{\text{ن}|}\text{ف}_{\text{س}} = \frac{\text{ل}_{\text{س}+\text{ن}} - \text{ل}_{\text{س}+\text{ن}+١}}{\text{ل}_{\text{س}}}$$

$${}_{١٠|}\text{ف}_{٥٠} = \frac{\text{ل}_{٥٠+١٠} - \text{ل}_{٥٠+١٠+١}}{\text{ل}_{٥٠}} = \frac{\text{ل}_{٦٠} - \text{ل}_{٦١}}{\text{ل}_{٥٠}}$$

هـ - لإيجاد احتمال شخص عمره(س= ٥٠عام) يعيش حتي العمر ٥٥ عام (أي سيعيش لمدة ن = ٥ أعوام) ويموت خلال(م =٣ أعوام) يمكن تطبيق العلاقة التالية:

$$ن \mid م \; ف_{س} = \frac{ل_{س+ن} - ل_{س+ن+م}}{ل_{س}}$$

$$٥ \mid ^{٣} ف_{٥٠} = \frac{ل_{٥٠+٥} - ل_{٥٠+٥+٣}}{ل_{٥٠}} = \frac{ل_{٥٥} - ل_{٥٨}}{ل_{٥٠}}$$

ز - لإيجاد احتمال شخص عمره(س= ٥٠ عام) يموت خلال(ن=٤ أعوام) يمكن تطبيق هذه العلاقة التالية

$$_{ن}ف_{س} = \frac{ل_{س} - ل_{س+ن}}{ل_{س}}$$

$$_{٤}ف_{٥٠} = \frac{ل_{٥٠} - ل_{٥٠+٤}}{ل_{٥٠}} = \frac{ل_{٥٠} - ل_{٥٤}}{ل_{٥٠}}$$

تمـــــارين

(١) ما هي الإفتراضات الأساسية لجداول الحياة؟

(٢) ما هي أنواع جداول الحياة وما هي استخداماتها؟

(٣) إذا أعطيت لك البيانات التالية:

العمر	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
عدد الأحياء	١٠٠٠٠٠	٩٩٠٠٠	٩٦٠٠٠	٩٤٠٠٠	٩٠٠٠٠

المطلوب : تكوين جدول الحياة علماً بأن عدد الوفيات للأشخاص من سن ٢٥ عام وحتي تمام العمر ٢٦ عام بلغوا ٥٠٠٠ شخص

(٤) إذا أعطيت لك البيانات التالية:

العمر	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥
احتمال الوفاة	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٨

المطلوب : تكوين جدول الحياة بافتراض أن أساس الجدول هو ١٠٠٠٠٠ شخص.

(٥) وضح معني الرموز التالية:

$_{٥}ح_{٢٠}$ ، $_{٥|}ف_{٥٥}$ ، $_{٥|٣}ف_{٣٠}$ ، $_{٥}ف_{٥٠}$

(٦) استكمل جدول الحياة التالي:

فئات العمر	عدد الأحياء $ل_س$	عدد الوفيات $و_س$	احتمال الوفاة $ف_س$	احتمال الحياة $ح_س$
٣٥	١٠٠٠٠٠		٠,٠٢	
٣٦			٠,٠٤	
٣٧			٠,٠٦	
٣٨			٠,٠٦	
٣٩			٠,٠٩	

(٧) اثبت أن مجموع احتمالي الحياة والوفاة تساوي الواحد الصحيح؟

(٨) شخص عمره ٥٠ عام ، المطلوب التعبير رمزياً عن الاحتمالات التالية

أ- احتمال أن يعيش هذا الشخص لمدة ١٥ سنة.

ب- احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٧٠ عام ويموت خلال السنة التالية مباشرة.

جـ - احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٦٨ عام ويموت خلال ثلاث سنوات تالية.

ء - احتمال أن يموت هذا الشخص خلال ٧ سنوات.

(٩) استكمل جدول الحياة التالي مع بيان طريقة الحصول علي الأرقام الناقصة.

فئات العمر	عدد الأحياء $ل_س$	عدد الوفيات $و_س$	احتمال الوفاة $ف_س$	احتمال الحياة $ح_س$
٦٥	١٠٠٠٠		٠,٢٠	
٦٦			٠,٢٢	
٦٧			٠,٢٦	
٦٨			٠,٣٠	
٦٩			٠,٣٥	

(١٠) لديك جزء من جدول الحياة التالي

العمر	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤
عدد الأحياء	١٠٠٠٠٠	٩٧٠٠٠	٩٣٠٠٠	٨٨٠٠٠	٨١٠٠٠

بمساعدة البيانات المتوافرة في الجدول السابق استخرج الاحتمالات التالية

أ- احتمال أن شخص عمره ٤٠ عام يعيش لمدة ٣ سنوات.

ب- احتمال أن شخص عمره ٤٠ عام يعيش لمدة ٣ سنوات ويموت في السنة التالية.

(١١) من جداول الحياة وجدنا أن احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٧ وأيضاً وجدنا أن احتمال حياة شخص (ب) = ٠,٩ أوجد

أ- احتمال حياتهما معاً.

ب- احتمال وفاتهما معاً.

ت- احتمال حياة أحدهما فقط.

ث- احتمال حياة أحدهما علي الأقل.

(١٢) من جداول الحياة وجدنا أن احتمال حياة شخص (أ) = ٠,٩ واحتمال حياة شخص (ب) = ٠,٨ واحتمال حياة شخص (ج) = ٠,٧

أوجد

أ - احتمال حياة الثلاث أشخاص معاً.

ب – احتمال حياة شخصين فقط.

جـ - احتمال حياة شخصين علي الأقل.

الفصل السادس

التحليل الرياضى للأقساط الصافية

مقدمة

فى بداية الأمر يجب التفرقة بين مصطلحين هامين وهما قسط التأمين الصافي وقسط التأمين الإجمالي (التجاري)، أن القسط الإجمالي (التجاري) هو عبارة عن القسط الصافي مضافاً إليه بعض العناصر الأخري وهي المصاريف الإدارية وهامش الربح وعبء الضريبة وفيما يلي توضيح لكل عنصر من العناصر التي تم ذكرها لبيان مدى أهميتها في حساب القسط الإجمالي .

أولاً: القسط الصافي

تأخذ معادلة القسط الصافي الشكل التالي:

القسط الصافي = مبلغ التامين × القيمة الحالية للجنيه × احتمال الحياة

وتبين المعادلة السابقة أن قيمة القسط الصافى تعتمد على ثلاث عوامل هى:

- قيمة مبلغ التأمين و تتوقف هذه القيمة على طلب المؤمن له في المبلغ المراد الحصول عليه ومن الطبيعي أنه كلما زاد مبلغ التأمين كلما زاد مبلغ القسط الصافي.
- العامل الثانى هو القيمة الحالية للجنيه وهى تتوقف علي عنصرين هامين وهما معدل الفائدة السنوي للاستثمار ومدة العقد حيث أن القيمة الحالية للجنيه بعد ن من السنوات هي $(١+ع)^{-ن}$ فكلما زاد معدل الاستثمار كلما زاد معدل الفائدة الفني ويقل بالتالي قسط التأمين الصافي.
- احتمال الحياة لشخص ما وهو يتوقف علي جداول الحياة والتي تحتوي علي احتمال الحياة والوفاة عند فئات أعمار مختلفة،

وبديهياً نجد أنه في عقود التأمين في حالة الحياة فقط نجد فيها أن قسط التأمين يقل كلما زاد عمر المؤمن له، بينما في عقود التأمين في حالة الوفاة فقط سيزداد قسط التأمين كلما زاد عمر المؤمن له، وبالتالي فإن قسط التأمين ستختلف قيمته بإختلاف عمر المؤمن له بفرض ثبات نوع الوثيقة وأيضاً مع ثبات مبلغ التأمين.

أن حساب القسط الصافي سوف يتطلب استخدام جداول الحياة وأيضاً سيحتاج استخدام جداول القيمة الحالية وتيسيراً لمستخدمي هذه الأنواع من الجداول فقد ظهر نوع جديد من الجداول يسمي بجداول أعداد الأستعاضة أوجداول الاستبدال أو جداول الرموز الحسابية للتأمين وجميعها عبارة عن جداول تعطي بيانات عن احتمالات الحياة والوفاة وكذلك عدد الأحياء وعدد الوفيات عند فئات أعمار مختلفة علي أساس معدل فائدة محدد (في الغالب تستخدم شركات التأمين معدل فائدة ٣% سنوياً).

ثانياً: المصاريف الإدارية

هي مبالغ تدفعها شركات التأمين لوكلاءها علي سبيل العمولة لكي تحفز هؤلاء الوكلاء علي العمل بجدية للحصول علي عملاء جدد، أيضاً تشمل المصاريف التي تتحملها الشركة علي سبيل الفحص الطبي للمؤمن له وأيضاً مصاريف الاستعلام عن المؤمن له ومصاريف التحقيقات الخاصة بالتعويضات في حالة الحوادث ومصاريف إدارية أخري، وقد نجد أن كثير من شركات التأمين تحدد هذه المصاريف بنسبة (من ٣% إلي ٤% من قيمة القسط الصافي) أو بنسبة (من ٠,٢% إلي ٠,٣% من قيمة مبلغ التأمين ككل).

ثالثاً: هامش الربح

هو المبلغ الذي يتقاضاه المساهمين في شركة التأمين كربح عن أموالهم المستثمرة في هذه الشركة بناء علي حصصهم، هنا يجب مراعاة عامل هام وهو معدل الفائدة السنوي والذي يعتبر عاملاً هاماً في تحديد ربح الشركة مستقبلاً، حيث أن الأقساط المحصلة من المؤمن له تقوم شركة التأمين بأستثمارها في مشروعات قد تكون في غالب الأمر مشروعات طويلة الأجل خاصة إذا كانت هذه الأقساط لعقود مدتها الزمنية طويلة قد تمتد لعشرات السنوات وخلال هذه السنوات تتغير معدلات الفائدة السنوية لذا يجب علي الشركة إضافة إحتياطي للطوارئ لمواجهة أي تغيرات قد تطرأ علي هذه المعدلات لمواجهة أي خسائر محتملة للشركة، وقد نجد أن كثير من شركات التأمين تحدد هذا البند بنسبة ٤% من قيمة القسط الصافي أو بنسبة ٠,٢% من قيمة مبلغ التأمين ككل.

رابعاً: عبء الضريبة

يختلف هذا المبلغ حسب النظام الضريبي التي تطبقه كل دولة غالباً علي شركات التأمين لديها، كما تقوم معظم الشركات باحتساب العبء الضريبي من الأرباح التي تحققها عملياتها الاستثمارية مع نسبة سماح معينة لمواجهة نفقاتها الإدارية.

تحليل رياضى للأقساط الصافية

تختلف أنواع وثائق التأمين علي الحياة وتتعدد بما يحقق أهداف ورغبات المؤمن لهم، وتختلف هذه العقود حسب نوع الخطر المؤمن منه وحسب طريقة دفع مبلغ التأمين وأيضاً حسب طريقة دفع قسط التأمين ، وفي الجزء القادم سوف نعرض الأنواع المختلفة لعقود التأمين علي الحياة حسب نوع الخطر المؤمن منه والتي يمكن تقسيمها إلي ثلاث أنواع وهم:

- عقود تستحق في حالة حياة المؤمن له لمدة معينة فقط .
- عقود تستحق في حالة وفاة المؤمن له فقط.
- عقود تستحق في حالة الحياة أو الوفاة للمؤمن له.

فيمايلي شرح مبسط لكل نوع من هذه الأنواع وطريقة حساب القسط الوحيد الصافي له مع بعض الأمثلة التوضيحية.

أولاً: العقود المستحقة في حالة حياة المؤمن له فقط

هي عقود تأمين يستحق فيها مبلغ التأمين إذا ظل المؤمن عليه علي قيد الحياة لمدة معينة من الزمن ويوجد نوعان رئيسيان لهذه العقود هما:

١ ـ عقد تأمين الوقفية البحتة

بموجب عقد تأمين الوقفية البحتة تلتزم شركة التأمين بدفع قيمة عقد التأمين (بوليصة التأمين) إلي الشخص المؤمن له سواء الشخص نفسه أو مستفيد محدد بالعقد وذلك إذا ظل المؤمن له علي قيد الحياة حتي نهاية المدة المتفق عليها في عقد التأمين وذلك في مقابل أن يقوم المؤمن له بسداد قسط وحيد يدفع في بداية التعاقد أو أقساط دورية أولها يبدأ مع بدء سريان العقد نفسه، أما إذا توفي المؤمن له خلال مدة العقد فلا تلتزم الشركة بدفع أي مبالغ لورثة الشخص المؤمن له وينتهي بذلك عقد التأمين.

يتم حساب القسط الصافي لعقد الوقفية البحتة بالقانون التالي

$$\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times (1+\text{ع})^{-\text{ن}} \times \frac{\text{ل}_{\text{س+ن}}}{\text{ل}_{\text{س}}}$$

أو باستخدام جداول الأستعاضة فيكون القانون علي الشكل التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{د}_{\text{س+ن}}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

حيث

ع تعبر عن معدل الفائدة السنوي.

ن تعبر عن مدة عقد التأمين.

س تعبر عن سن المؤمن له عند إبرام عقد التأمين.

ل تعبر عن قيم جدولية موجودة بجداول الحياة.

د قيم جدولية موجودة بجداول الأستبدال.

٢ ـ عقود المعاشات (عقود دفعات الحياة).

بموجب عقود دفعات الحياة تلتزم شركة التأمين بدفع دفعات دورية (معاشات) تدفع للمؤمن له طوال مدة حياته وحتي وفاته وذلك في مقابل أن يقوم المؤمن له بدفع قسط وحيد عند إجراء التعاقد، هذه العقود لها أنواع عديدة منها:

أ- دفعات مدي الحياة العادية

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبالغ دورية للمؤمن له في نهاية كل فترة زمنية معينة (في نهاية كل شهر أو نهاية كل ٣ شهور أو نهاية كل ٦ شهور أو نهاية كل سنة) إبتداء من تاريخ إبرام التعاقد طالما ظل المؤمن له علي قيد الحياة ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س+١}}{\text{د س}}$$

ب- دفعات مدي الحياة غير العادية (الفورية)

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبالغ دورية للمؤمن له في بداية كل فترة زمنية معينة (في بداية كل شهر أو بداية كل ٣ شهور أو بداية كل ٦ شهور أو بداية كل سنة) إبتداء من تاريخ إبرام التعاقد طالما ظل المؤمن له علي قيد الحياة ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س}}{\text{د س}}$$

جـ - دفعات مدي الحياة العادية المؤجلة

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبالغ دورية للمؤمن له في نهاية كل فترة زمنية معينة (في نهاية كل شهر أو نهاية كل ٣ شهور أو نهاية كل ٦ شهور أو نهاية كل سنة) ولكن تبدأ دفع هذه الدفعات بعد مدة معينة من تاريخ التعاقد يطلق عليها مدة التأجيل وسوف نرمز لها بالرمز (م) وذلك طالما ظل المؤمن له علي قيد الحياة ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س+م+١}}{\text{د س}}$$

ء ـ دفعات مدي الحياة الفورية المؤجلة

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبالغ دورية للمؤمن له في بداية كل فترة زمنية معينة (في بداية كل شهر أو بداية كل ٣ شهور أو بداية كل ٦ شهور أو بداية كل سنة) ولكن تبدأ دفع هذه الدفعات بعد مدة معينة من تاريخ التعاقد يطلق عليها مدة التأجيل وسوف نرمز لها بالرمز (م) وذلك طالما ظل المؤمن له علي قيد الحياة ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{ألقسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س+م}}{\text{د س}}$$

هـ ـ دفعات مؤقتة عادية

يتشابه هذا النوع من العقود مع عقود دفعات مدي الحياة العادية ولكن يوجد اختلاف جوهري وهو أن الدفعات الدورية التي ستدفعها شركة التأمين للمؤمن له علي سبيل المعاش لن تستمر إلي حين وفاة الشخص ولكنها محددة بفترة زمنية مؤقتة وسوف نرمز لها بالرمز (ت) وينتهي

عقد التأمين هنا إما بإنتهاء المدة المؤقتة المحددة بالعقد أو بوفاة المؤمن له أيهما أقرب، يتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س}+1} - \text{ن}_{\text{س}+\text{ت}+1}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

و - دفعات مؤقتة فورية

يتشابه هذا النوع من العقود مع عقود دفعات مدي الحياة الفورية ولكن يوجد اختلاف جوهري وهو أن الدفعات الدورية التي ستدفعها شركة التأمين للمؤمن له علي سبيل المعاش لن تستمر إلي حين وفاة الشخص ولكنها محددة بفترة زمنية مؤقتة وسوف نرمز لها بالرمز (ت) وينتهي عقد التأمين هنا إما بإنتهاء المدة المؤقتة المحددة بالعقد أو بوفاة المؤمن له أيهما أقرب، يتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س}} - \text{ن}_{\text{س}+\text{ت}}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

ز - دفعات مؤقتة عادية مؤجلة

يتشابه هذا النوع من العقود مع عقود دفعات مدي الحياة العادية المؤجلة ولكن تدفع الدفعات لفترة زمنية مؤقتة (ت)، يتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س}+\text{م}+1} - \text{ن}_{\text{س}+\text{م}+\text{ت}+1}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

ت- دفعات مؤقتة فورية مؤجلة

يتشابه هذا النوع من العقود مع عقود دفعات مدي الحياة الفورية المؤجلة ولكن تدفع الدفعات لفترة زمنية مؤقتة (ت)، يتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س+م} - \text{ن س+م+ت}}{\text{د س}}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٣٠ سنة لشراء عقد وقفية بحته قيمته ١٥٠٠٠ جنيه عند بلوغه سن ٤٥ سنة.

الحل

نوع العقد هو عقد وقفية بحته .

عمر الشخص = س = ٣٠ سنة   مبلغ التأمين = ١٥٠٠٠ جنيه .

مدة عقد التأمين = ن = ٤٥ ـ ٣٠ = ١٥ سنة.

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}}$$

$$= ١٥٠٠٠ \times \frac{\text{د }_{٣٠+١٥}}{\text{د }_{٣٠}}$$

$$= ١٥٠٠٠ \times \frac{\text{د }_{٤٥}}{\text{د }_{٣٠}}$$

ويتم إيجاد القيم الجدولية وهي $\text{د}_{٤٥}$ ، $\text{د}_{٣٠}$ من جداول الأستعاضة السابق الإشارة إليها.

مثال:

اتفق شخص عمره ٥٥ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد تأمين وقفية بحته يضمن له الحصول علي مبلغ ١٥٠٠٠٠ جنيه إذا كان علي قيد الحياة عند سن الستين فما هو ثمن شراء هذا العقد؟

الحل

نوع العقد هو عقد وقفية بحته .

عمر الشخص = س = ٥٥ سنة   مبلغ التأمين = ١٥٠٠٠٠ جنيه .

مدة عقد التأمين = ن = ٦٠ ــ ٥٥ = ٥ سنوات.

$$\boxed{\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{د_{س+ن}}{د_{س}}}$$

$$\text{ثمن شراء العقد} = ١٥٠٠٠٠ \times \frac{د_{٥٥+٥}}{د_{٥٥}}$$

$$= ١٥٠٠٠٠ \times \frac{د_{٦٠}}{د_{٥٥}}$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحته قيمته ٣٠٠٠٠ جنيه لمدة ١٠ سنوات لشخص عمره الان ٥٠ سنة إذا علمت أن معدل فائدة الاستثمار ٣٪ سنوياً؟

الحل

نوع العقد هو عقد وقفية بحته .

عمر الشخص = س = ٥٠ سنة   مبلغ التأمين = ٣٠٠٠٠ جنيه .

مدة عقد التأمين = ١٠ سنوات.   معدل الفائدة = ع = ٣٪.

يتم حساب القسط الصافي لعقد الوقفية البحتة بالقانون التالي:

$$\boxed{\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times (١+ع)^{-ن} \times \frac{ل_{س+ن}}{ل_{س}}}$$

$$\text{القسط الصافي} = ٣٠٠٠٠ \times (١+٠,٠٣)^{-١٠} \times \frac{ل_{٥٠+١٠}}{ل_{٥٠}}$$

حل آخر باستخدام جداول الأستعاضة علي الشكل التالي:

$$\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{د_{س+ن}}{د_{س}}$$

$$= ٣٠٠٠٠ \times \frac{د_{٥٠+١٠}}{د_{٥٠}}$$

$$= ٣٠٠٠٠ \times \frac{د_{٦٠}}{د_{٥٠}}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه شخص عمره ٣٠ سنة لشراء عقد وقفية بحته قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه عند بلوغه سن ٥٠ سنة، إذا علمت أن

$د_{٣٠} = ٢٥٤٩٣٢٤,٧$ ، $د_{٥٠} = ٤٥١٩٦٩١,٤$

الحل

نوع العقد هو عقد وقفية بحته .

عمر الشخص = س = ٣٠ سنة   مبلغ التأمين = ١٠٠٠٠٠ جنيه .

مدة عقد التأمين = ن = ٥٠ ـ ٣٠ = ٢٠ سنة.

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{د_{س+ن}}{د_{س}}$$

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = ١٠٠٠٠٠ \times \frac{د_{٣٠+٢٠}}{د_{٣٠}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \frac{د_{٥٠}}{د_{٣٠}}$$

وبمعلومية القيم الجدولية المعطاة بالتمرين وهي $د_{٥٠}$ ، $د_{٣٠}$ والمستخرجة من جداول الأستعاضة يكون

$$\text{القسط الوحيد الصافى} = ١٠٠٠٠٠ \times \frac{٤٥١٩٦٩١,٤}{٢٥٤٩٣٢٤,٧}$$

$$= ١٧٧٢٨٩,٧٥ \text{ جنيه.}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لعقد دفعات مدي الحياة تدفع في نهاية كل سنة مبلغها ٨٠٠٠ جنيه لشخص عمره ٤٠ سنة؟

الحل

نوع العقد هو عقد دفعات مدي الحياة عادية لأنها تدفع في نهاية كل سنة .

عمر الشخص = س = ٤٠ سنة

مبلغ الدفعة = ٨٠٠٠ جنيه .

$$\boxed{\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{ن_{س+١}}{د_{س}}}$$

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = ٨٠٠٠ \times \frac{ن_{٤٠+١}}{د_{٤٠}}$$

$$= ٨٠٠٠ \times \frac{ن_{٤١}}{د_{٤٠}}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لعقد دفعات مدي الحياة تدفع في بداية كل سنة مبلغها ٨٠٠٠ جنيه لشخص عمره ٤٠ سنة؟

الحل

نوع العقد هو عقد دفعات مدي الحياة فورية لأنها تدفع في بداية كل سنة .

عمر الشخص = س = ٤٠ سنة   مبلغ الدفعة = ٢٠٠٠ جنيه .

$$\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن س}}{\text{د س}}$$

$$\text{القسط الصافي} = ٨٠٠٠ \times \frac{\text{ن}_{٤٠}}{\text{د}_{٤٠}}$$

مثال:

اتفق شخص عمره ٥٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات مدي الحياة في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٣٦٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات مؤجلة لمدة ١٠ سنوات فأحسب القسط الوحيد الصافى في الحالات التالية:

أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).

ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

الحل

نوع العقد هو عقد دفعات مدي الحياة مؤجلة.

عمر الشخص = س = ٥٠ سنة   مبلغ الدفعة = ٣٦٠٠٠ جنيه .

فترة التأجيل (م) = ١٠ سنوات.

<u>أ – في حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية مؤجلة)</u>

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س+م+١}}}{\text{د س}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{\text{ن}_{٥٠+١٠+١}}{\text{د}_{٥٠}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{\text{ن}_{٦١}}{\text{د}_{٥٠}}$$

ب – في حالة دفع الدفعات في بداية كل سنة (دفعات فورية مؤجلة)

$$\boxed{\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س+م}}}{\text{د}_{\text{س}}}}$$

$$= \text{٣٦٠٠٠} \times \frac{\text{ن}_{\text{٥٠+١٠}}}{\text{د}_{\text{٥٠}}}$$

$$= \text{٣٦٠٠٠} \times \frac{\text{ن}_{\text{٦٠}}}{\text{د}_{\text{٥٠}}}$$

مثال:

اتفق شخص عمره ٥٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٣٦٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات لن يستمر دفعها مدي الحياة ولكن تم الإتفاق علي الإستمرار في دفعها لمدة مؤقتة هي ١٥ عام طالما كان الشخص حياً، فأحسب القسط الوحيد الصافى في الحالات التالية:

أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).

ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

الحل

عمر الشخص = س = ٥٠ سنة   مبلغ الدفعة = ٣٦٠٠٠ جنيه .

الفترة المؤقتة (ت) = ١٥ سنة. النوع هو عقد دفعات مدي الحياة مؤقت

أ – في حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية مؤقتة)

$$\boxed{\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س+١}} - \text{ن}_{\text{س+ت+١}}}{\text{د}_{\text{س}}}}$$

$$= \text{٣٦٠٠٠} \times \frac{\text{ن}_{\text{٥٠+١}} - \text{ن}_{\text{٥٠+١٥+١}}}{\text{د}_{\text{٥٠}}}$$

$$= \text{٣٦٠٠٠} \times \frac{\text{ن}_{\text{٥١}} - \text{ن}_{\text{٦٦}}}{\text{د}_{\text{٥٠}}}$$

ب – في حالة دفع الدفعات في بداية كل سنة (دفعات فورية مؤقتة)

$$\boxed{\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{ن_{س} - ن_{س+ت}}{د_{س}}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{ن_{٥٠} - ن_{٥٠+١٥}}{د_{٥٠}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{ن_{٥٠} - ن_{٦٥}}{د_{٥٠}}$$

مثال:

اتفق شخص عمره ٥٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات مؤجل لمدة ١٠ سنوات في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٣٦٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات لن يستمر دفعها مدي الحياة ولكن تم الإتفاق علي الإستمرار في دفعها لمدة مؤقتة هي ١٥ عام فقط طالما كان الشخص حياً، فأحسب القسط الوحيد الصافى

أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).

ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

الحل

نوع العقد هو عقد دفعات مدي الحياة مؤجلة مؤقتة.

عمر الشخص = س = ٥٠ سنة مبلغ الدفعة = ٣٦٠٠٠ جنيه .

فترة التأجيل (م) = ١٠ سنوات الفترة المؤقتة (ت) = ١٥ سنة.

أ – في حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية مؤجلة مؤقتة)

$$\boxed{\text{القسط الصافي} = ٣٦٠٠٠ \times \frac{ن_{س+م+١} - ن_{س+م+ت+١}}{د_{س}}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{ن_{٥٠+١٠+١} - ن_{٥٠+١٠+١٥+١}}{د_{٥٠}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{ن_{٦١} - ن_{٧٦}}{د_{٥٠}}$$

ب- في حالة دفع الدفعات في بداية كل سنة (دفعات فورية مؤجلة مؤقتة)

$$\text{القسط الصافي} = \text{مبلغ الدفعة} \times \frac{\text{ن}_{\text{س}+\text{م}} - \text{ن}_{\text{س}+\text{م}+\text{ت}}}{\text{د}_{\text{س}}}$$

$$= ٣٦٠٠٠ \times \frac{\text{ن}_{٥٠+١٠} - \text{ن}_{٥٠+١٠+١٥}}{\text{د}_{٥٠}}$$

$$\text{القسط الوحيد لصافي} = ٣٦٠٠٠ \times \frac{\text{ن}_{٦٠} - \text{ن}_{٧٥}}{\text{د}_{٥٠}}$$

ثانياً: العقود المستحقة في حالة وفاة المؤمن له فقط

هي عقود تأمين تلتزم بمقتضاها شركة التأمين أن تدفع مبلغ التأمين إلي المستفيدين (سواء كانوا ورثة المؤمن له أو أشخاص أخرين يحددهم المؤمن له بنفسه) وذلك عند وفاة المؤمن له خلال مدة التأمين في مقابل أن يدفع المؤمن له قسط وحيد أو أقساط دورية حسب نص العقد بين الطرفين ويوجد عدة أنواع لهذه العقود هي:

١ ـ عقد التأمين مدي الحياة.

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبلغ التأمين إلي المستفيدين المحددين بنص العقد وذلك في حالة وفاة المؤمن له في أي وقت بعد تاريخ التعاقد دون تحديد مدة محددة يشترط أن تتم بعدها الوفاة، وذلك مقابل أن يدفع المؤمن له قسط وحيد أو أقساط دورية حسب شروط التعاقد، ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\boxed{\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{مـ}_{\text{س}}}{\text{د}_{\text{س}}}}$$

حيث

$\text{مـ}_{\text{س}}$ ، $\text{د}_{\text{س}}$ هي قيم جدولية تستخرج من أعمدة الاستبدال لجداول الحياة

٢ ـ عقد التأمين مدي الحياة المؤجل.

يتشابه هذا العقد مع عقد التأمين مدي الحياة في أن كلاهما يشترط وفاة المؤمن له، ولكن يكمن الإختلاف الرئيسي في أنه في حالة عقد التأمين مدي الحياة المؤجل يشترط أن تتم وفاة المؤمن له بعد مرور مدة معينة من الزمن تسمي بمدة التأجيل ونرمز لها بالرمز (م) ، أما إذا تمت الوفاة خلال مدة التأجيل فيسقط حق المستفيدين في مبلغ التأمين، ويتم حساب القسط الصافي لهذا العقد بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}}$$

٣ ـ عقد التأمين مدي الحياة المؤقت.

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بدفع مبلغ التأمين إلي المستفيدين المحددين بنص العقد وذلك في حالة وفاة المؤمن خلال مدة زمنية محددة (ت) يتفق عليها بين الطرفين، وذلك مقابل أن يدفع المؤمن له قسط واحد أو أقساط دورية حسب شروط التعاقد، ويتم حساب القسط الصافي لهذا النوع من العقود بالقانون التالي

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{مـ س - مـ س+ت}}{\text{د س}}$$

فيمايلي بعض الأمثلة التي توضح كيفية تطبيق القوانين السابقة لعقود التأمين مدي الحياة.

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٤٠ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة بمبلغ مليون جنيه يستحق لورثته عند وفاته في أي وقت، إذا علمت أن:

(مـ٤٠ = ١٦٠٧٧٤٣ ، د٤٠ = ٣٤٤١٧٦٥)

الحل

نوع العقد هو عقد تأمين مدي الحياة

مبلغ التأمين= ١٠٠٠٠٠٠ جنيه   عمر الرجل = س = ٤٠ عام.

القسط الوحيد الصافي = مبلغ التأمين × $\frac{\text{م}_{\text{س}}}{\text{د}_{\text{س}}}$

= مبلغ التأمين × $\frac{\text{م}_{٤٠}}{\text{د}_{٤٠}}$

= $١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{١٦٠٧٧٤٣}{٣٤٤١٧٦٥}$ = ٤٦٧١٢٧ جنيه

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٤٠ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة بمبلغ ٥٠٠٠٠٠ جنيه يستحق لورثته إذا توفي بعد سن الخمسين؟

الحل

نوع العقد هو عقد تأمين مدي الحياة مؤجل لمدة م =٥٠-٤٠=١٠ سنوات

مبلغ التأمين= ٥٠٠٠٠٠ جنيه   عمر الرجل = س = ٤٠ عام.

القسط الوحيد الصافي = مبلغ التأمين × $\frac{\text{م}_{\text{س}+\text{م}}}{\text{د}_{\text{س}}}$

= $٥٠٠٠٠٠ \times \frac{\text{م}_{٤٠+١٠}}{\text{د}_{٤٠}}$ = $٥٠٠٠٠٠ \times \frac{\text{م}_{٥٠}}{\text{د}_{٤٠}}$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٤٠ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة بمبلغ مليون جنيه يستحق لورثته إذا توفي في أي سن بعد مرور ٦ سنوات من تاريخ التعاقد؟ إذا علمت أن

($\text{م}_{٤٦}$= ١٥٤١٤٣٥ ، $\text{د}_{٤٠}$ = ٣٤٤١٧٦٥)

الحل

نوع العقد هو عقد تأمين مدي الحياة مؤجل لمدة م = ٦ سنوات

مبلغ التأمين= ١٠٠٠٠٠٠ جنيه عمر الرجل = س = ٤٠ عام.

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{م_{س+م}}{د_س}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٤٠+٦}}{د_{٤٠}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٤٦}}{د_{٤٠}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{١٥٤١٤٣٥}{٣٤٤١٧٦٥}$$

= ٤٤٧٨٦١,٧جنيه.

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٥٠ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة مؤقت لمدة ١٠ سنوات إذا كان مبلغ التأمين يقدر بمبلغ ٢٠٠٠٠٠جنيه؟

الحل

نوع العقد هو عقد تأمين مدي الحياة مؤقت لمدة ت = ١٠ سنوات

مبلغ التأمين= ١٠٠٠٠٠ جنيه عمر الرجل = س = ٥٠ عام.

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{م_س - م_{س+ت}}{د_س}$$

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = ٢٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٥٠} - م_{٥٠+١٠}}{د_{٥٠}}$$

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = ٢٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٥٠} - م_{٦٠}}{د_{٥٠}}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٢٢ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة مؤقت لمدة ١٠ سنوات بمبلغ مليون جنيه علماً

($د_{٢٢}$ = ٥٥٩٣٧٤٩ ، $م_{٢٢}$ = ١٧٨٤٣٦٧ ، $م_{٣٢}$ = ١٦٨٧٧٨٢)

الحـــــل

نوع العقد هو عقد تأمين مدي الحياة مؤقت لمدة ت = ١٠ سنوات

مبلغ التأمين= ٥٠٠٠٠٠ جنيه عمر الرجل = س = ٢٢ عام.

$$\text{القسط الوحيد الصافي} = \text{مبلغ التأمين} \times \frac{م_{س} - م_{س+ت}}{د_{س}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٢٢} - م_{٢٢+١٠}}{د_{٢٢}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{م_{٢٢} - م_{٣٢}}{د_{٢٢}}$$

$$= ١٠٠٠٠٠٠ \times \frac{١٧٨٤٣٦٧ - ١٦٨٧٧٨٢}{٥٥٩٣٧٤٩}$$

$$= ١٧٢٦٦,٤ \text{ ج}$$

ثالثاً: العقود المستحقة في حالة حياة أو وفاة المؤمن له

في هذا النوع من العقود تلتزم شركة التأمين بإلتزامين:

<u>الإلتزام الأول :</u> تلتزم شركة التأمين بدفع مبلغ التأمين إلي المؤمن له إذا ظل علي قيد الحياة إلي نهاية مدة التعاقد.

<u>الإلتزام الثاني :</u> تلتزم شركة التأمين بدفع مبلغ التأمين إلي المستفيدين (الورثة أو غيرهم) إذا توفي المؤمن له خلال مدة التعاقد.

وبالتالي فهذه العقود عبارة عن عقد مركب لعقدين وهما عقد الوقفية البحتة وعقد التأمين المؤقت لذا يطلق علي هذه العقود اسم عقود التأمين المختلط. ومن أهم أنواع هذه العقود وأبسطها هو عقد التأمين المختلط العادي ويمكن استنتاج الشكل الرياضي للقسط الوحيد الصافي له عن طريق جمع القسط الوحيد الصافي لعقد الوقفية البحتة إضافة إلي القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المؤقت أى أن:

القسط الوحيد الصافي للتأمين المختلط = القسط الوحيد الصافي لعقد الوقفية البحتة + القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المؤقت.

∴ القسط الوحيد الصافي للتأمين المختلط

$$= \left(\text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}}\right) + \left(\text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{مـ س - مـ س+ت}}{\text{د س}}\right)$$

حيث أن (ن) هنا ترمز لمدة عقد الوقفية البحتة ، (ت) ترمز للفترة المؤقتة التي يسري فيها تنفيذ عقد التأمين المؤقت وهما متساويين عند الحديث عن عقد التأمين المختلط، لذا يمكن استبدال الرمز (ت) بالرمز (ن)، فتصبح المعادلة علي الشكل التالي

∴ القسط الوحيد الصافي للتأمين المختلط

$$= \left(\text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}}\right) + \left(\text{مبلغ التأمين} \times \frac{\text{مـ س - مـ س+ن}}{\text{د س}}\right)$$

وبأخذ مبلغ التأمين عامل مشترك فنحصل علي القسط الوحيد الصافي

$$\text{للتأمين المختلط} = \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}} + \frac{\text{مـ س - مـ س+ن}}{\text{د س}} \right)$$

وبتوحيد المقامات فيصبح الشكل النهائي لقانون القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المختلط العادي

$$= \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{\text{د س+ن} + \text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}} \right)$$

كما يوجد نوع أخر من عقود التأمين المختلط تسمي بعقد التأمين المختلط المضاعف وبمقتضي هذا النوع تلتزم شركة التأمين بدفع ضعف مبلغ التأمين للمؤمن له إذا ظل علي قيد الحياة حتي نهاية مدة التعاقد، أما إذا توفي خلال هذه المدة فلا يدفع للمستفيدين إلا مبلغ التأمين فقط، لذا فهذا النوع لا يختلف عن سابقه إلا في نقطة واحدة وهي أن المبلغ الذي يدفع للمؤمن له في حالة حياته لنهاية مدة التعاقد هو ضعف مبلغ التأمين وبالتالي فيصبح قانون القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المختلط

$$\text{المضاعف} = \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{\text{٢ د س+ن} + \text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}} \right)$$

وفيما يلي بعض الأمثلة التي توضح كيفية حساب الأقساط الصافية لعقود التأمين المختلط.

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط قيمته ٥٠٠٠٠ جنيه مدته ١٠ سنوات لشخص عمره ٤٠ سنة؟

الحل

مبلغ التأمين = ٥٠٠٠٠ س = ٤٠ سنة ن = ١٠ سنوات

القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المختلط العادي

$$= \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{\text{د}_{\text{س+ن}} + \text{م}_{\text{س}} - \text{م}_{\text{س+ن}}}{\text{د}_{\text{س}}} \right)$$

$$= ٥٠٠٠٠ \times \left(\frac{\text{د}_{٤٠+١٠} + \text{م}_{٤٠} - \text{م}_{٤٠+١٠}}{\text{د}_{٤٠}} \right)$$

$$= ٥٠٠٠٠ \times \left(\frac{\text{د}_{٥٠} + \text{م}_{٤٠} - \text{م}_{٥٠}}{\text{د}_{٤٠}} \right)$$

مثال

أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه مدته ٢٠ سنة لشخص عمره ٤٥ سنة، علماً بأنه توافرت لديك القيم الجدولية التالية من أعمدة الاستبدال بجداول الحياة

$\text{د}_{٤٥} = ٢٩٧٨٦٩٨$ $\qquad$ $\text{د}_{٦٥} = ١٣٦٦١٢٨$

$\text{م}_{٤٥} = ١٥٤١٤٣٥$ $\qquad$ $\text{م}_{٦٥} = ٩٩٨٣٧٦$

الحل

مبلغ التأمين = ١٠٠٠٠٠ $\qquad$ س = ٤٥ سنة $\qquad$ ن = ٢٠ سنة

القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المختلط العادي

$$= \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{\text{د}_{\text{س+ن}} + \text{م}_{\text{س}} - \text{م}_{\text{س+ن}}}{\text{د}_{\text{س}}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{\text{د}_{٤٥+٢٠} + \text{م}_{٤٥} - \text{م}_{٤٥+٢٠}}{\text{د}_{٤٥}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{\text{د}_{٦٥} + \text{م}_{٤٥} - \text{م}_{٦٥}}{\text{د}_{٤٥}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{١٣٦٦١٢٨ + ١٥٤١٤٣٥ - ٩٩٨٣٧٦}{٢٩٧٨٦٩٨} \right)$$

= ٦٤٠٩٤,٦ جنيه

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط مضاعف قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه مدته ٢٠ سنة لشخص عمره ٤٥ سنة، علماً بأنه توافرت لديك القيم الجدولية التالية من أعمدة الاستبدال بجداول الحياة

$\text{د}_{٤٥} = ٢٩٧٨٦٩٨$ $\text{د}_{٦٥} = ١٣٦٦١٢٨$

$\text{م}_{٤٥} = ١٥٤١٤٣٥$ $\text{م}_{٦٥} = ٩٩٨٣٧٦$

الحل

مبلغ التأمين = ١٠٠٠٠٠   س = ٤٥ سنة   ن = ٢٠ سنة

القسط الوحيد الصافي لعقد التأمين المختلط المضاعف

$$= \text{مبلغ التأمين} \times \left(\frac{٢\text{د}_{\text{س}+\text{ن}} + \text{م}_{\text{س}} - \text{م}_{\text{س}+\text{ن}}}{\text{د}_{\text{س}}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{٢\text{د}_{٤٥+٢٠} + \text{م}_{٤٥} - \text{م}_{٤٥+٢٠}}{\text{د}_{٤٥}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{٢\text{د}_{٦٥} + \text{م}_{٤٥} - \text{م}_{٦٥}}{\text{د}_{٤٥}} \right)$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \times \left(\frac{(١٣٦٦١٢٨)^{٢} + ١٥٤١٤٣٥ - ٩٩٨٣٧٦}{٢٩٧٨٦٩٨} \right)$$

= ١٠٩٩٥٧,٨ جنيه.

ملخص قوانين حساب القسط الوحيد الصافي

أولاً : العقود المستحقة في حالة الحياة فقط

نوع العقد	القسط الوحيد الصافي
عقد الوقفية البحتة	مبلغ التأمين × $\frac{\text{د س+ن}}{\text{د س}}$ أو بمعلومية معدل الفائدة مبلغ التأمين × $(1+\text{ع})^{-\text{ن}}$ × $\frac{\text{ل س+ن}}{\text{ل س}}$
عقد دفعات مدي الحياة عادية	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س+1}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة فورية	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة عادية مؤجلة	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س+م+1}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة فورية مؤجلة	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س+م}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة عادية مؤقتة	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س+1} - \text{ن س+ت+1}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة فورية مؤقتة	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س} - \text{ن س+ت}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة عادية مؤجلة مؤقتة	مبلغ الدفعة× $\frac{\text{ن س+م+1} - \text{ن س+م+ت+1}}{\text{د س}}$
عقد دفعات مدي الحياة فورية مؤجلة مؤقتة	مبلغ الدفعة × $\frac{\text{ن س+م} - \text{ن س+م+ت}}{\text{د س}}$

ثانياً : العقود المستحقة في حالة الوفاة فقط

نوع العقد	القسط الوحيد الصافي
عقد تأمين مدي الحياة	مبلغ التأمين × $\frac{\text{مـ س}}{\text{د س}}$
عقد تأمين مدي الحياة مؤجل	مبلغ التأمين × $\frac{\text{مـ س+م}}{\text{د س}}$
عقد تأمين مدي الحياة مؤقت	مبلغ التأمين × $\frac{\text{مـ س - مـ س+ت}}{\text{د س}}$

ثالثاً : العقود المستحقة في حالة الحياة أو الوفاة

نوع العقد	القسط الوحيد الصافي
عقد تأمين مختلط عادي	مبلغ التأمين × $\left(\frac{\text{د س+ن} + \text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}}\right)$
عقد تأمين مختلط مضاعف	مبلغ التأمين × $\left(\frac{\text{٢ د س+ن} + \text{مـ س} - \text{مـ س+ن}}{\text{د س}}\right)$

تمـــــارين

على حساب الأقساط الصافية

(١) اتفق شخص عمره ٥٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد تأمين وقفية بحته يضمن له الحصول علي مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيه إذا كان علي قيد الحياة عند سن الستين فما هو ثمن شراء هذا العقد؟

(٢) أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه جد لشراء عقد تأمين بمقتضاه يضمن الحفيد البالغ من العمر ١٠ أعوام الحصول علي مبلغ ١٠٠٠٠٠جنيه بشرط بقاء الجد علي قيد الحياة حتي وصول الأبن لعمر ٢٢ عام؟

(٣) احسب القسط الوحيد الصافى لعقد وقفية بحته قيمته ١٠٠٠٠٠ جنيه لمدة ٥ سنوات لشخص عمره الان ٥٠ سنة إذا علمت أن معدل فائدة الاستثمار ٣ % سنوياً؟

(٤) أوجد القسط الوحيد الصافي لعقد دفعات مدي الحياة مبلغها ٥٠٠٠ جنيه لشخص عمره ٤٥ سنة

أ – إذا كانت الدفعات تدفع في نهاية كل سنة.

ب – إذا كانت الدفعات تدفع في بداية كل سنة.

(٥) اتفق شخص عمره ٥٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات مدي الحياة في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٧٢٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات مؤجلة لمدة ٥ سنوات فأحسب القسط الوحيد الصافى في الحالات التالية:

أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).

ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

(٦) اتفق شخص عمره ٤٥ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٣٦٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات لن يستمر دفعها مدي الحياة ولكن تم الإتفاق علي الإستمرار في دفعها لمدة مؤقتة هي ١٥ عام طالما كان الشخص حياً، فأحسب القسط الوحيد الصافى في الحالات التالية:

أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).

ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

(٧) أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٥٢ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة بمبلغ ٣٠٠٠٠٠ جنيه يستحق لورثته إذا توفي بعد سن ٦٣ سنة ؟

(٨) أوجد القسط الوحيد الصافى الذي يدفعه رجل عمره ٤٥ سنة لشراء عقد تأمين مدي الحياة مؤقت لمدة ٥ سنوات إذا كان مبلغ التأمين يقدر بمبلغ ٥٠٠٠٠٠جنيه؟

(٩) أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط قيمته ٥٠٠٠٠ جنيه مدته ٢٠ سنة لشخص عمره ٤٥ سنة؟

(١٠) أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط عادي قيمته مليون جنيه مدته ٢٠ سنة لشخص عمره ٤٥ سنة، علماً بأنه توافرت لديك القيم الجدولية التالية من أعمدة الاستبدال بجداول الحياة

$د_{٤٥} = ٢٩٧٨٦٩٨$ $د_{٦٥} = ١٣٦٦١٢٨$

$م_{٤٥} = ١٥٤١٤٣٥$ $م_{٦٥} = ٩٩٨٣٧٦$

تمارين متنوعة

علي التأمين

(١) قام مصنع ملابس بالتأمين لدي ٤ شركات تأمين ضد أخطار الحريق وذلك بمبلغ ٢٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (أ) وبمبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (ب) وبمبلغ ٦٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (ج) وبمبلغ ٤٠٠٠٠ لدي شركة التأمين (د) وأثناء سريان مدة العقد نشب حريق بسيط بمخازن مصنع الملابس وقدرت الخسائر بمبلغ ١٥٠٠٠٠ جنيه فإذا علمت أن قيمة ممتلكات المصنع تقدر بمبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه، احسب ما تتحمله كلا من شركات التأمين و مصنع الملابس ؟

(٢) قام مصنع أجهزة كهربائية بالتأمين لدي شركة تأمين واحدة ضد أخطار الحريق وذلك بمبلغ ٤٠٠٠٠٠ جنيه وأثناء سريان مدة العقد نشب حريق ببعض الأجهزة الكهربائية بمخزن المصنع وقدرت الخسائر بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه فإذا علمت أن قيمة ممتلكات المصنع تقدر بمبلغ ١٠٠٠٠٠٠ جنيه، احسب ما تتحمله كلا من شركة التأمين (المؤمن) و مصنع الأجهزة الكهربائية (المؤمن له)؟

(٣) قام مصنع لعب أطفال بالتأمين لدي ٣ شركات تأمين ضد أخطار الحريق وذلك بمبلغ ١٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (أ) وبمبلغ ٤٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (ب) وبمبلغ ٣٠٠٠٠ جنيه لدي شركة التأمين (ج) وأثناء سريان مدة العقد نشب حريق بسيط بمخازن مصنع لعب الأطفال وقدرت الخسائر بمبلغ ٤٠٠٠٠ جنيه فإذا علمت أن قيمة ممتلكات المصنع تقدر بمبلغ ٢٠٠٠٠٠ جنيه، احسب ما تتحمله كلا من شركات التأمين و مصنع لعب الأطفال ؟

(٤) إستخرجت إحدي شركات التأمين من سجلاتها احتمال الوفاة لبعض الأعمار لمجموعة محددة من الأشخاص ولخصت ذلك في الجدول التالي

العمر	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤
احتمال الوفاة	٠,١٠	٠,١١	٠,١٣	٠,١٣٥	٠,١٥

المطلوب : تكوين جدول الحياة باستخدام المعلومات السابقة بافتراض أن أساس الجدول هو ١٠٠٠٠٠ شخص.

(٥) شخص عمره ٥٥ عام ، المطلوب التعبير رمزياً عن الاحتمالات التالية:

أ- احتمال حياة هذا الشخص.
ب- احتمال وفاة هذا الشخص.
ت- احتمال أن يعيش هذا الشخص لمدة ١٠ سنوات.
ث- احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٧٠ عام ويموت خلال السنة التالية مباشرة.
ج- احتمال أن يعيش هذا الشخص حتي العمر ٧٠ عام ويموت خلال ثلاث سنوات تالية.
ح- احتمال أن يموت هذا الشخص خلال ٥ سنوات.

(٦) اتفق شخص عمره ٦٠ سنة مع شركة تأمين علي شراء عقد دفعات مؤجل لمدة ١٠ سنوات في مقابل أن تدفع له الشركة معاش سنوي ٦٠٠٠٠ جنيه، فإذا علمت أن هذه الدفعات لن يستمر دفعها مدي الحياة ولكن تم الإتفاق علي الإستمرار في دفعها لمدة مؤقتة هي ١٢ عام فقط طالما كان الشخص حياً، فأحسب القسط الوحيد الصافى

خ- أ – فى حالة دفع الدفعات في نهاية كل سنة (دفعات عادية).
د- ب – في حالة دفع الدفعات في أول كل سنة (دفعات فورية).

(٧) أوجد القسط الوحيد الصافى لعقد تأمين مختلط قيمته ١٥٠٠٠٠ جنيه مدته ١٠ سنوات لشخص عمره ٥٠ سنة؟